第五章

二　　次　　型

习　题　五

（A）

1、写出下列二次型的矩阵

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+4x_1x_3-2x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_1x_4+2x_3x_4$。

解：（1）因为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：$\begin{pmatrix}2&0&2\\0&-1&-1\\2&-1&0\end{pmatrix}$。

（2）因为

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},$$

所以二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵为：$\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}$。

2、写出下列对称矩阵所对应的二次型：

（1） $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&-2\\\frac{1}{2}&-2&2\end{pmatrix}$；　　**（2）** $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&-1&0\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\-1&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$。

www.khdaw.com

解：（1） 设 $X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=X^{\mathrm{T}}AX=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0 & -2\\ \frac{1}{2} & -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

$$=x_1^2+2x_3^2-x_1x_2+x_1x_3-4x_2x_3。$$

（2）设 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$，则

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^{T}AX=(x_1,x_2,x_3,x_4)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & -1 & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$

$$=-x_2^2+x_4^2+x_1x_2-2x_1x_3+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4。$$

3、用正交替换法将下列二次型化为标准形，并写出所作的线性替换。

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-2x_2x_3$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$。

解：（1） 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0\end{pmatrix}。$$

A 的特征方程为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 2 & 0\\ 2 & \lambda-1 & 2\\ 0 & 2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda^2-5\lambda+4)=0,$$

由此得到 A 的特征值 $\lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$。

对于 $\lambda_1=-2$，求其线性方程组 $(-2E-A)X=0$，可解得基础解系为

www.khdaw.com

$$\alpha_1=(1,2,2)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_2=1$，求其线性方程组 $(E-A)X=0$，可解得基础解系为：

$$\alpha_2=(2,1,-2)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_3=4$，求其线性方程组 $(4E-A)X=0$，可解得基础解系为：

$$\alpha_3=(2,-2,1)^{\mathrm{T}}。$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})^{\mathrm{T}},$$

令

$$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

则 $$P^{\mathrm{T}}AP=\mathrm{diag}(-2,1,4)=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}。$$

作正交替换 $X=PY$，即

$$\begin{cases}x_1=\frac{1}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3\\ x_2=\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2-\frac{2}{3}y_3\\ x_3=\frac{2}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3\end{cases},$$

二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可化为标准形：

$$-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2。$$

www.khdaw.com

（2）类似题（1）方法可得：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}，P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

即得标准形：$\sqrt{2}y_2^2-\sqrt{2}y_3^2$。

（3）类似题（1）的方法可得：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}，\quad P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

即得标准形：$2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$。

4、用配方法将下列二次型化为标准形：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+4x_1x_3$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3)=-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$。

解：（1）先将含有 x_1 的项配方。

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1(x_2+x_3)+(x_2+x_3)^2-(x_2+x_3)^2+2x_2^2+6x_2x_3+5x_3^2$$

$$=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2,$$

再对后三项中含有 x_2 的项配方，则有

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2+x_3)^2+x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2+(x_2+2x_3)^2。$$

设 $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

令 $Y=BX$，则可将原二次型化为标准形 $y_1^2+y_2^2$。

（2）此二次型没有平方项，只有混合项。因此先作变换，使其有平方项，然后按题（1）的方法进行配方。

www.khdaw.com

令

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}，即 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}。$$

则原二次型化为

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2(y_1+y_2)(y_1-y_2) + 4(y_1+y_2)y_3$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 + 4y_2y_3$$

$$= 2(y_1+y_3)^2 - 2(y_2-y_3)^2,$$

设 $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$，$Z=(z_1,z_2,z_3)^{\mathrm{T}}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

令 $Z=BY$，则可将原二次型化为标准形 $2z_1^2 - 2z_2^2$。

（3）类似题（2）的方法，可将原二次型化为标准形：

$$-4z_1^2 + 4z_2^2 + z_3^2。$$

5、用初等变换法将下列二次型化为标准形：

（1） $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3$。

解：（1）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}。$$

于是

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

令

www.khdaw.com

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

作可逆线性变换 $X=CY$，原二次型可化为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=y_1^2+y_2^2。$$

（2）类似题（1）的方法，原二次型可化为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\ y_1^2-4y_2^2+y_3^2。$$

（3）类似题（1）的方法，原二次型可化为标准形：

$$f(x_1,x_2,x_3)=\ 2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2-6y_3^2。$$

6、已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

的秩为 2。求参数 *c* 的值，并将此二次型化为标准形。

解：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & c\end{pmatrix}。$$

因为 A 的秩为 2，令 $\det A=0$，可得 $c=3$。

即 $$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

也就是

$$A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix},$$

通过初等变换法，即可将其化为标准形：$4y_2^2+9y_3^2$。

7、设 2*n* 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})=x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$$

试用可逆线性替换法将其化为标准形。

解：令

www.khdaw.com

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_{2n} \\ x_2 = y_2 + y_{2n-1} \\ \cdots \\ x_n = y_n + y_{n+1} \\ x_{n+1} = y_n - y_{n-1} \\ \cdots \\ x_{2n-1} = y_2 - y_{2n-1} \\ x_{2n} = y_1 - y_{2n} \end{cases}, \quad P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & 1 & 0 \\ & & \ddots & \iddots & & \\ \vdots & & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 1 & -1 & & \vdots \\ & & \iddots & \ddots & & \\ 0 & 1 & & & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

即作正交变换 $X=CY$，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 可化为标准型：

$$y_1^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-\cdots-y_{2n}^2。$$

8、已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$ (a>0)通过正交变换化为标准型 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 a 的值及所作的正交替换矩阵。

解：因为原二次型可化为 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，可知原二次型的矩阵的特征值为 1，2 和 5。

而原二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a \\ 0 & a & 3 \end{pmatrix}。$$

故 A 的特征方程为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-3 & a \\ 0 & a & \lambda-3 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0。$$

因此将此特征方程的解 1，2，5 代入得：a=2。

对于 $\lambda_1=1$，求其线性方程组 $(E-A)X=0$，可解得基础解系为

$$\alpha_1=(0,1,1)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_2=2$，求其线性方程组 $(2E-A)X=0$，可解得基础解系为：

$$\alpha_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}}。$$

对于 $\lambda_3=5$，求其线性方程组 $(5E-A)X=0$，可解得基础解系为：

$$\alpha_3=(0,1,-1)^{\mathrm{T}}。$$

www.khdaw.com

将$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$单位化，得

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}},$$

故正交替换矩阵为：

$$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}。$$

9、判别下列二次型是否为正定二次型：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+6x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=10x_1^2+2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2+24x_1x_3-28x_2x_3$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1^2+x_2^2+4x_3^2+7x_4^2+6x_1x_3+4x_1x_4-4x_2x_3+$

$2x_2x_4+4x_3x_4$。

解：（1）二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}。$$

由于 5>0，$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}$=26>0，$\begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$=84>0,

即 A 的一切顺序主子式都大于零，故此二次型为正定的。

（2）二次型$f(x_1,x_2,x_3)$的矩阵为

www.khdaw.com

$$A=\begin{pmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 1\end{pmatrix}。$$

由于

$$|A|=\begin{vmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 1\end{vmatrix}=-3588<0,$$

故此二次型不为正定的。

（3）二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 1 & -2 & 2\\ 3 & -2 & 4 & 2\\ 2 & 2 & 2 & 7\end{pmatrix}。$$

由于

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=-9<0,$$

故此二次型不为正定的。

10、当 t 为何值时，下列二次型为正定二次型：

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$；

（2） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$；

（3） $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$。

解：（1）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{pmatrix}。$$

由于

$$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 4\end{vmatrix}=4-t^2,\quad \begin{vmatrix}1 & t & 5\\ t & 4 & 3\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=-t^2+30t-105,$$

但易知不等式组

$$\begin{cases}4-t^2>0\\ -t^2+30t-105>0\end{cases}$$

无解，因此，不论 t 取何值，此二次型都不是正定的。

（2）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}。$$

此二次型正定的充要条件为

$$1>0,\quad \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix}=1-t^2>0,\quad |A|=-5t^2-4t>0,$$

由此解得：$-\dfrac{4}{5}<t<0$。

（3）二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dfrac{t}{2} \\ 0 & \dfrac{t}{2} & 0 \end{pmatrix}。$$

由

$$2>0,\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}>0,\quad |A|=1-\frac{t^2}{2}>0,$$

解得：$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$。

11、设 A、B 为 n 阶正定矩阵，证明 BAB 也是正定矩阵。

证明：由于 A、B 是正定矩阵，故 A 及 B 为实对称矩阵。

所以 $(BAB)^T=B^TA^TB^T=BAB$，即BAB也为实对称矩阵。

由于A、B为正定矩阵，则存在可逆矩阵C_1，C_2，有

$$A=C_1^TC_1,\ B=C_2^TC_2\ ,$$

所以 $BAB=C_2^TC_2C_1^TC_1C_2^TC_2=(C_1C_2^TC_2)^T(C_1C_2^TC_2)$，

即 BAB 也是正定矩阵。

12、设A是可逆矩阵，证明A^TA为正定矩阵。

证明：显然，A^TA为对称矩阵，

又因为 $A^TA=(A^T)A$,

又A是可逆矩阵，所以A^TA为正定矩阵。

13、如果 A，B 为 n 阶正定矩阵，则 $A+B$ 也为正定矩阵。

证明：由于 A、B 是正定矩阵，故 A 及 B 为实对称矩阵。从而 $A+B$ 也为实对称矩阵，而且

$$f=X^TAX,\quad g=X^TBX,$$

www.khdaw.com

为正定二次型。于是对不全为零的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$X^{\mathrm{T}}AX > 0,\quad X^{\mathrm{T}}BX > 0。$$

故 $$h = X^{\mathrm{T}}(A+B)X = X^{\mathrm{T}}AX + X^{\mathrm{T}}BX > 0,$$

即二次型 $h = X^{\mathrm{T}}(A+B)X$ 为正定的，故 $A+B$ 为正定矩阵。

14、设A为正定矩阵，则A^{-1}和A^{*}也是正定矩阵。其中A^{*}为A的伴随矩阵。

证明：因为 A 为正定矩阵，故 A 为实对称矩阵。

从而 $(A^{-1})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} = A^{-1}$ 即 A^{-1} 也为对称矩阵，

$(A^{*})^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{*} = A^{*}$ 即 A^{*} 也为对称矩阵。

由已知条件可知，存在可逆矩阵 C，使得

$$A = C^{\mathrm{T}}C。$$

于是 $$A^{-1} = (C^{\mathrm{T}}C)^{-1} = C^{-1}(C^{-1})^{\mathrm{T}} = Q^{\mathrm{T}}Q,$$

$$A^{*} = |A|A^{-1} = |A|C^{-1}(C^{-1})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{A}}C^{-1}[\frac{1}{\sqrt{A}}C^{-1}]^{\mathrm{T}} = P^{\mathrm{T}}P,$$

其中 $Q = (C^{-1})^{\mathrm{T}}$，$P = (\frac{1}{\sqrt{A}}C^{-1})^{\mathrm{T}}$ 都为可逆矩阵。

故A^{-1}和A^{*}都为正定矩阵。

15、设 A 为 $n\times m$ 实矩阵，且 $r(A)=m<n$，求证：

（1）$A^{\mathrm{T}}A$为m阶正定矩阵；

（2）AA^{T}为n阶半正定矩阵。

证明（1）因为 A 为 $n\times m$ 实矩阵，所以 A^{T} 为 $m\times n$ 矩阵，又 $r(A)=m<n$，因此，方程组 $AX=O$，只有零解。于是对于任意的 $X\neq O$，有 $AX\neq O$。则

$X^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}A)X = (AX)^{\mathrm{T}}(AX) > 0$。

因此，$A^{\mathrm{T}}A$ 为正定矩阵。

（2）因为 A 为 $n\times m$ 实矩阵，所以 A^{T} 为 $m\times n$ 矩阵，又 $r(A)=m<n$，因此，方程组 $A^{\mathrm{T}}X=O$，有非零解。即存在 $X_0\neq O$，有 $AX_0=O$。于是对于任意的 $X\neq O$，有

$X^{\mathrm{T}}(AA^{\mathrm{T}})X = (A^{\mathrm{T}}X)^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}}X) \geq 0$。

因此，AA^{T} 为半正定矩阵。

16、试证实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是半正定的充分必要条件是 f 的正惯性指数等于它的秩。

www.khdaw.com

证明：充分性。设 f 的正惯性指数等于它的秩，都是 r，则负惯性指数为零。于是 f 可经过线性变换 $X=CY$ 变成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2{}^2+\cdots+y_r^2\text{。}$$

从而对任一组实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，由$X=CY$可得$Y=C^{-1}X$，即有相应的实数 $y_1,\cdots,y_r,\cdots,y_n$，

使 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2{}^2+\cdots+y_r^2\geq 0.$

即 f 为半正定的。

必要性。设 f 为半正定的，则 f 的负惯性指数必为零。否则，f 可经过线性变换 $X=CY$ 化为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+\cdots+y_s{}^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_r^2\text{，s<r。}$$

于是当y_r=1，其余y_i=0 时，由$X=CY$可得相应的值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，带入上式则得

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-1<0\text{。}$$

这与 f 为半正定的相矛盾，从而 f 的正惯性指数与秩相等。

17、证明：正定矩阵主对角线上的元素都是正的。

证明：设矩阵 A 为正定矩阵，因此 $f=X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型。

于是对不全为零的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，有

$$X^{\mathrm{T}}AX>0\text{，}$$

取 $X=\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$(i=1,2,\cdots,n)$

则 $\varepsilon_i^{\mathrm{T}}A\varepsilon_i=d_i>0$，$(i=1,2,\cdots,n)$

即主对角线上的元素都是正的。

www.khdaw.com