第五章

二　　次　　型

习　题　五

（B）

1、设 *A* 为 *n* 阶实对称矩阵，如果对任一 *n* 维列向量 $X \in \mathrm{R}^n$，都有 $X^{\mathrm{T}}AX = 0$，试证：*A*=*O*。

证明：因为矩阵 *A* 为实对称矩阵，设为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}，其中 a_{ij} = a_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n).$$

令 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^n$，

由已知得，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j$ **=0。**

首先取 $X=\varepsilon_i=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，$(i=1,2,\cdots,n)$

则　　$\varepsilon_i^{\mathrm{T}}A\varepsilon_i=a_{ii}=0$，$(i=1,2,\cdots,n)$

即主对角线上的元素都为零。

其次，取 $X=(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，又 $X^{\mathrm{T}}AX=0$，有

$$a_{ii}+a_{jj}+a_{ij}+a_{ji}=0,$$

因 $a_{ii}=a_{jj}=0$，*A* 为对称矩阵，所以

$$2a_{ij}=0\quad (i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,n)$$

因此 *A*=*O*。

2、试证：二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j$$

为正定二次型。

证明：此二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

显然A_1=2>0,$A_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$=3>0,

$$A_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}=(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=n+1>0,$$

因此，此二次型为正定二次型。

3、设 *n* 元二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2$$
$$+(x_n+a_nx_1)^2$$

其中 a_i (*i*=1,2, ⋯ , *n*) 为实数。试问：当 a_i (*i*=1,2, ⋯ , *n*) 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型。

解：由题设条件知，对于任意的$x_1,x_2,\cdots,x_n$，有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geq 0$。其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2=0 \\ x_2+a_2x_3=0 \\ \vdots \\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0 \\ x_n+a_nx_1=0 \end{cases}$$

此方程组仅有零解的充分必要条件是其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0,$$

所以当$a_1,a_2,\cdots,a_n\neq -1$时，$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为正定二次型。

4、已知 *A* 为反对称矩阵，试证：$E-A^2$ 为正定矩阵。

证明：因为 A 为反对称矩阵，所以 $A^{\mathrm{T}}=-A$，

因此 $E-A^2=(E-A)(E+A)=(E+A^{\mathrm{T}})(E+A)=(E+A)^{\mathrm{T}}(E+A)$。

所以 $E-A^2$ 为正定矩阵。

5、设 A 是一个实对称矩阵，试证：对于实数 t，当 t 充分大时，$tE+A$ 为正定矩阵。

证明：设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 且 λ_i 为实数，取 $t>\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$，则 $tE+A$ 的特征值为 $\lambda_1+t,\lambda_2+t,\cdots,\lambda_n+t$ 全部大于零。因此，当 $t>\max\limits_{1\le i\le n}\{|\lambda_i|\}$ 时，$tE+A$ 为正定矩阵。

6、设 A 是实对称矩阵，且 $\det A<0$，试证：必存在 n 维列向量 $X\in\mathrm{R}^n$，使得 $X^{\mathrm{T}}AX<0$。

证明：因为 A 为实对称矩阵，且 $\det A<0$，故二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$ 的秩为 n，且不是正定的，故负惯性指数至少为 1，从而 f 可经过可逆线性变换 $X=CY$，化成

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX=y_1^2+\cdots+y_s^2-y_{s+1}^2-\cdots-y_n^2 \qquad (1)$$

其中 $1\le s<n$。当 $y_n=1$，且其余 $y_i=0$ 时，上式右端小于零。但由 $X=CY$ 所确定的向量 $X\ne 0$，使（1）式左右两端相等，即有实 n 维向量 X，使 $X^{\mathrm{T}}AX<0$。

7、求把二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+9x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2-4x_1x_3-10x_2x_3$$

化为

$$g(y_1,y_2,y_3)=2y_1^2+3y_2^2+6y_3^2-4y_1y_2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

的可逆线性变换。

解：二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}2&4&-2\\4&9&-5\\-2&-5&3\end{pmatrix}$$

由初等变换法，可得经过可逆线性变换 $X=C_1Y$，使得 $C_1^{\mathrm{T}}XC_1=\mathrm{diag}(2,1,0)$，

其中

$$C_1=\begin{pmatrix}1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

二次型 $g(y_1,y_2,y_3)$ 的矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

存在可逆线性变换$Y=C_2X$，使得$C_2^{\mathrm{T}}YC_2=\mathrm{diag}(2,1,0)$，

其中
$$C_2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以，存在可逆线性变换$X=(C_2^{-1}C_1)Y$，使得$f(x_1,x_2,x_3)$化为$g(y_1,y_2,y_3)$，

$$C_2^{-1}C_1=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}。$$

8、设 A 为实对称矩阵，且

$$A^3-3A^2+5A-3E=0$$

问 A 是否为正定矩阵。

解：设λ是A的任一特征值，对应特征向量$x\neq 0$，即有$Ax=\lambda x$，代入已知的等式

$$A^3-3A^2+5A-3E=0$$

有 $(A^3-3A^2+5A-3E)x=(\lambda^3-3\lambda^2+5\lambda-3)x=0$

因为$x\neq 0$，故λ满足$\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda-3=0$。

得λ=1 或$\lambda=1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$，因 A 为实对称矩阵，其特征值一定为实数，故只有λ=1，即 A 的全部特征值就是λ=1>0,因此 A 为正定矩阵。

9、设$A=(a_{ij})$为 n 阶正定矩阵。求证 A 的任一主子式都大于零。

证明：首先，令A_k为A的任一个k阶主子式，

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k} \end{pmatrix}$$

由于 A 是正定的，故二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^{\mathrm{T}}AX$$

对任意不全为零的实数$c_1,c_2,\cdots,c_n$，都有

$$f(c_1,c_2,\cdots,c_n)>0,$$

从而对不全为零的实数$c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k}$，有

$$f(0,\cdots,c_{i_1},0,\cdots,c_{i_2},\cdots c_{i_k},\cdots,0)>0$$

（即在$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中除$x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$外其余变量全取 0），但是，对变量为$x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k}$而矩阵为$A_k$的二次型$g(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_k})$来说，有

$$g(c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_k})=f(0,\cdots,c_{i_1},0,\cdots,c_{i_2},\cdots c_{i_k},\cdots,0)>0$$

故g为正定二次型，从而A_k为正定的。故$|A_k|>0$。

10、设 *A* 为 *n* 阶正定矩阵，证明 *A*+*E* 的行列式大于 1。

证明：因为 *A* 为正定矩阵，不妨设 *A* 的特征值分别为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$且$\lambda_i>0$，

则 $A+E$ 的特征值为$\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$且$\lambda_i+1>1$，从而有

$$|A+E|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\cdots(\lambda_n+1)>1。$$

11、设矩阵 *A*=$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B=(kE+A)^2$，其中 *k* 为实数，*E* 为单位矩阵，求对角矩阵Λ，使 *B* 与Λ相似，并求 *k* 为何值时，*B* 为正定矩阵。

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$

因此，A 的特征值为 0，2，2。

记对角矩阵

$$D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}。$$

因为 A 为实对称矩阵，故存在正交矩阵 P，使得

$$P^{\mathrm{T}}AP=D,$$

所以 $$A=(P^{\mathrm{T}})^{-1}DP^{-1}=PDP^{\mathrm{T}}。$$

于是 $$B=(kE+A)^2=(kPP^{\mathrm{T}}+PDP^{\mathrm{T}})^2=P(kE+D)^2P^{\mathrm{T}}$$

$$=P\begin{pmatrix}(k+2)^2&0&0\\0&(k+2)^2&0\\0&0&k^2\end{pmatrix}P^{\mathrm{T}};$$

由此可得 $\Lambda=\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}$。

因此当 $k\neq -2, k\neq 0$ 时，即所有特征值均大于零时，B 为正定矩阵。

12、设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $B=\lambda E+A^{\mathrm{T}}A$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵。

证明：因为

$$B^{\mathrm{T}}=(\lambda E+A^{\mathrm{T}}A)^{\mathrm{T}}=\lambda E+A^{\mathrm{T}}A=B,$$

所以，B 为对称矩阵。

对于任意的实 n 维列向量 X，有

$$X^{\mathrm{T}}BX=X^{\mathrm{T}}(\lambda E+A^{\mathrm{T}}A)X=\lambda X^{\mathrm{T}}X+X^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}AX=\lambda X^{\mathrm{T}}X+(AX)^{\mathrm{T}}AX$$

当 $X\neq 0$ 时，有 $X^{\mathrm{T}}X>0$，$(AX)^{\mathrm{T}}AX\geq 0$，

因此当 $\lambda>0$ 时，对于任意的 $X\neq 0$，有 $X^{\mathrm{T}}BX>0$，即 B 为正定矩阵。

13、设实对称矩阵 A 为 m 阶正定矩阵，B 为 m×n 实矩阵，试证 B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是矩阵 B 的秩 $r(B)=n$.

证明：必要性。设 B^TAB 为正定矩阵，则对任意的实 n 维列向量 $X\neq 0$，有

$$X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X>0 \text{ 即 } (BX)^{\mathrm{T}}A(BX)>0$$

于是 $BX\neq 0$，因此 $BX=0$ 只有零解，从而 $r(B)=n$。

充分性。因 $(B^{\mathrm{T}}AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}B=B^{\mathrm{T}}AB$，即 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为实对称矩阵。若 $r(B)=n$，则线性方程组 $BX=0$ 只有零解。从而对任意实 n 维列向量 $X\neq 0$ 有 $BX\neq 0$。

又 A 为正定矩阵，所以对于 $BX\neq 0$，有 $(BX)^{\mathrm{T}}BX>0$，于是当 $X\neq 0$ 时，有

$$X^{\mathrm{T}}(B^{\mathrm{T}}AB)X>0,$$

故 $B^{\mathrm{T}}AB$ 为正定矩阵。

14、在 R^3 中，将下述二次方程化为标准形式，并判断曲面类型。

（1）$x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3-4\sqrt{5}x_1+2\sqrt{5}x_2-3\sqrt{5}x_3-\dfrac{5}{7}=0$；

（2）$4x_1^2-6x_2^2-6x_3^2-4x_2x_3-4x_1+4x_2+4x_3-5=0$。

解：（1）设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix},\quad \alpha=\begin{pmatrix}-2\sqrt{5}\\ \sqrt{5}\\ -\frac{3}{2}\sqrt{5}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}。$$

则该二次方程可记为

$$X^{\mathrm{T}}AX+2\alpha^{\mathrm{T}}X-\frac{5}{7}=0。$$

由 $\det(\lambda E-A)=0$，可得 A 的特征值和对应的特征向量：

$$\lambda_1=2,\quad \xi_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda_2=2,\quad \xi_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda_3=-7,\quad \xi_3=(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}。$$

将特征向量单位化，得

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}},\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{5}}(2,0,1)^{\mathrm{T}},\quad \eta_3=\frac{1}{3}(-1,-2,2)^{\mathrm{T}}。$$

取正交矩阵

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

则

$$B^{\mathrm{T}}AB=\mathrm{diag}(2,2,-7)。$$

设 $X=BY$，其中 $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$。原二次方程化为

$$Y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}ABY+2\alpha^{\mathrm{T}}BY-\frac{5}{7}=0,$$

即

$$2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2+5y_1-\frac{11}{2}y_2-\sqrt{5}y_3-\frac{5}{7}=0 \qquad (1)$$

令 $z_1=y_1-\frac{5}{4}$，$z_2=y_2-\frac{11}{8}$，$z_3=y_2+\frac{\sqrt{5}}{14}$，

则（1）式可化为

$$2z_1^2+2z_2^2-7z_3^2=\frac{125}{8}。$$

用平面 $z_3=c$ 截此曲面，截痕为椭圆；用平面 $z_1=a$ 截此曲面，截痕为双曲线；用平

面 $z_2=b$ 截此曲面，截痕为双曲线，由次可知，此曲面为单叶双曲面。

（2）类似题（1）的做法，可把原二次方程化为：

$$4z_1^2-4z_2^2-8z_3^2=5$$

此曲面为双叶双曲面。

15、已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经过正交变换

$$(x,y,z)^{\mathrm{T}}=P(\xi,\eta,\zeta)^{\mathrm{T}}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$。求 a，b 的值和正交矩阵 P。

解：设 $X=(x,y,z)^{\mathrm{T}}$，$Y=(\xi,\eta,\zeta)^{\mathrm{T}}$，$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}$，

则原二次曲面方程可表示为 $X^{\mathrm{T}}AX=4$，椭圆柱面方程为 $Y^{\mathrm{T}}BY=4$，此问题即寻求一正交变换 $X=PY$，把原二次型化为已知的标准形。

因此，由已有的标准形，可知矩阵 A 的 3 个特征值分别为 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=1$，$\lambda_3=4$，

由 $\det(\lambda E-A)=0$，可得 $a=3$，$b=1$。

由矩阵 A 的特征值，可求得对应的特征向量：

$$\lambda_1=0,\quad \xi_1=(1,0,-1)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda_2=1,\quad \xi_2=(1,-1,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\lambda_3=4,\quad \xi_3=(1,2,1)^{\mathrm{T}}。$$

将各个特征向量单位化得：

$$\eta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^{\mathrm{T}},\quad \eta_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^{\mathrm{T}},\quad \eta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}}。$$

故

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}。$$