第四章

矩阵的特征值和特征向量

习 题 四

(B)

1、判断下述结论是否正确

（1）实数域上的 n 阶矩阵 A 一定有 n 个特征向量；

解 ： 错 。n 阶矩阵 A 的特征多项式在实数域上不一定有 n 个根。

（2）A 与 A^{T} 有相同的特征值和特征向量；

解 ： 错。 若 A 与 A^{T} 有相同的特征值和特征向量，设 α 是 A 的属于 λ_0 的特征向量（$\alpha \neq 0$) 则

$$A\alpha = \lambda\alpha, A^{\mathrm{T}}\alpha = \lambda\alpha,$$

$$\therefore \quad (A - A^{\mathrm{T}})\alpha = 0,$$

$$\therefore \quad A = A^{\mathrm{T}},$$

而只有当 A 是对称矩阵时才有 $A = A^{\mathrm{T}}$。

（3） 若 λ_0 是 A 的一个特征值，则齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的非零解就是 A 的属于 λ_0 的特征向量；

解： 错。齐次线性方程组 $(\lambda_0 E - A)X = 0$ 的基础解系的线性组合才是 A 的属于 λ_0 的特征向量

（4）A 的一个特征向量 α 可以属于 A 的不同特征值 λ_1，λ_2；

解： 错。 若 A 的一个特征向量 α 可以属于 A 的不同特征值 λ_1，λ_2，则

$$A\alpha = \lambda_1\alpha \quad , \quad A\alpha = \lambda_2\alpha,$$

$$\therefore \quad (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha = 0,$$

$\therefore \quad \lambda_1 = \lambda_2$ 与题设矛盾。

（5）若 λ_0 不是 A 的一个特征值，则 $(\lambda_0 E - A)$ 可逆。

解： 对。 若$(\lambda_0 E-A)$不可逆 则$\det(\lambda_0 E-A)=0$与若λ_0不是A的特征值矛盾。

2、 **设$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$，求$A$的对应于其特征值的特征子空间的基。**

解： 矩阵A的特征多项式为：

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -1 & \lambda-2 & 1\\ -1 & -3 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)\ (\lambda-1)^2。$$

由$\det(\lambda E-A)=0$可得A的特征值$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$ ，

对于$\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组（$E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系

$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$ ，

对于$\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组（$-E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系

$\alpha_2=(-3,1,0)^{\mathrm{T}}$,

$\therefore v_{\lambda_1},v_{\lambda_2}$的特征子空间的基为$\alpha_1=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,

$\therefore v_{\lambda_3}$的特征子空间的基为$\alpha_2=(-3,1,0)^{\mathrm{T}}$.

3、 **设$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & x & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求$A$的特征值为1，2，3。试求$x$的值。**

解： 矩阵A的特征多项式为：

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ \lambda-2 & \lambda-x & 0\\ -4 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-(x+1)\lambda+x+2)$$ 又

A的特征值为1，2，3

$\therefore \lambda=1,2,3$时， $\det(\lambda E-A)$=0 由此解得x=4 。

4、 **已知$\alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$是矩阵$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$的一个特征向量。试确定$a$, b值和a所对应的特征值，并判断A是否可对角化？**

解： $\because \alpha=(1,1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 5 & a & 3\\ -1 & b & -2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量，

$\therefore (\lambda E-A)\alpha=0$ ， 即 $\begin{pmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda-a & -3\\ 1 & -b & \lambda+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$，

解此线性方程组可得 $\lambda=-1, a=-3, b=0$ 。

则矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3 。$$

由 det（$\lambda E-A$）$=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，

对于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$，解齐次线性方程组（$-E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系 $\alpha_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 。

$\because$ 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$ 的线性无关的特征向量只有一个，

$\therefore A$ 不能对角化。

5、 已知三阶矩阵 A 的特征值为 -1，1，2，矩阵 $B=A-3A^2$ 。试求 B 的特征值和 det B 。

解： $\because B=A-3A^2$，

$\therefore 2E+B$ =（$E-A$）（$2E+3A$），

$4E+B$ =（$E+A$）（$4E-3A$），

$10E+B$ =（$2E-A$）（$5E+3A$），

又 A 的特征值为 -1，1，2，

$\therefore$ det（$2E+B$）=det（$E-A$）（$2E+3A$）=0，

det（$4E+B$）=det（$E+A$）（$4E-3A$）=0，

det（$10E+B$）=det（$2E-A$）（$5E+3A$）=0，

$\therefore A$ 的特征值为－1，1，2 ，

$\therefore B$ 的特征值为－2，－4，－10，

$\therefore \det B$ =（－2）$\times(-4)\times(-10)=-80$ 。

6、 试证：

1） 果 A 为奇数阶正交矩阵，且 det A =1，则 1 是 A 的一个特征值。

证明： 由 A 为奇数阶正交矩阵，知 $A^{\mathrm{T}}A=E$ ，且 $A^{\mathrm{T}}=A$。

$\det(E-A)=\det(AA^{\mathrm{T}}-A)=\det A\det(A^{\mathrm{T}}-E)$

$=\det A\det(A^{\mathrm{T}}-E)^{\mathrm{T}}=\det(A-E)=(-1)^n\det(E-A)$,

又因为 A 为奇数阶矩阵。所以 $\det(E-A)=-\det(E-A)$。即：

$\det(E-A)=0$,

$\therefore 1$ 是 A 的一个特征值。

2） 果 A 为 n 阶正交矩阵，且 $\det A=-1$，则 -1 是 A 的一个特征值。

证明： 由 A 为 n 阶正交矩阵，知 $A^{\mathrm{T}}A=E$，且 $A^{\mathrm{T}}=A$。

$\det(-E-A)=\det(-AA^{\mathrm{T}}-A)=\det A\det(-A^{\mathrm{T}}-E)=-\det(-E-A)$,

即 $\det(-E-A)=0$,

$\therefore -1$ 是 A 的一个特征值。

7、 判断下述结论是否正确，并简述理由。

（1）如果 $A\sim B$，则存在对角矩阵 Λ，使 A，B 都相似于 Λ；

解： 错。 由 $A\sim B$ 不能得出存在对角矩阵 Λ，使 A，B 都相似于 Λ，由 $A\sim B$ 不能得出 A,B 都能对角化，因此也不能保证 A，B 都相似于 Λ。

（2） 如果 $A\sim B$，则 A,B 有相同的特征值和特征向量；

解： 错。 若 $A\sim B$，则 A,B 有相同的特征值，但未必有相同的特征向量，设 A 的属于 λ 的特征向量为 α（$\alpha\neq 0$），由于 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$,所以 $A=PBP^{-1}$，于是 $PBP^{-1}\alpha=\lambda\alpha$，即 $B(P^{-1}\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$ 由此可知矩阵 B 的属于 λ 的特征向量为 $P^{-1}\alpha$ 。

（3）如果 $A\sim B$，则对任意的常数 λ，有 $\lambda E-A=\lambda E-B$；

解： 错 。若 $\lambda E-A=\lambda E-B$，则 $A=B$，而由 $A\sim B$ 不能得出 $A=B$

（4）如果 $A\sim B$，则对任意的常数 λ，有 $\lambda E-A\sim\lambda E-B$。

解： 对。 由于 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$ ，

$\therefore\ \lambda E-B=\lambda E-P^{-1}AP$,

$\therefore\ P(\lambda E-B)P^{-1}=P(\lambda E-P^{-1}AP)P^{-1}$,

$\therefore\ P(\lambda E-B)P^{-1}=\lambda E-A$,

$\therefore \lambda E - B = P^{-1}(\lambda E - A)P$，

$\therefore$ 如果 $A \sim B$，则对任意的常数 λ，有 $\lambda E - A \sim \lambda E - B$。

8、　　**设 n 阶矩阵**

$$A=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$$

（1）求 A 的特征值和特征向量；

（2）A 是否可以对角化？若可以，试求出可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

解：（1） A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda - a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - na & -a & -a & \cdots & -a \\ \lambda - na & \lambda - a & -a & \cdots & -a \\ \lambda - na & -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda - na & -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - na) \begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \cdots & -a \\ 1 & \lambda - a & -a & \cdots & -a \\ 1 & -a & \lambda - a & \cdots & -a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & -a & -a & \cdots & \lambda - a \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - na) \begin{vmatrix} 1 & -a & -a & \cdots & -a \\ 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^{n-1}(\lambda - na),$$

由 det（$\lambda E - A$）$= 0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1 = 0(n-1重)$，$\lambda_2 = na$。

对于 λ_1 =0，解齐次线性方程组（$0E-A$）X=0，可得方程组的一个基础解系

$\alpha_1=(-1,1,0\cdots,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}},\cdots,\alpha_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,0,1)^{\mathrm{T}}$，

对于 $\lambda_2=na$，解齐次线性方程组（$naE-A$）$X=0$，可得方程组的一个基础解系

$\alpha_n=(1,1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$ 。

（2）A 可以对角化。 令 $P=(\alpha_1\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 即

$$P=\begin{pmatrix}-1&-1&\cdots&-1&-1&1\\1&0&\cdots&0&0&1\\0&1&\cdots&0&0&1\\0&0&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&&1&0&1\\0&0&\cdots&0&1&1\end{pmatrix}$$ 时， 则 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。

9、 **设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots b_n)$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta=0$，记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^{\mathrm{T}}$，求**

（1）A^2 及其特征值；

解： $\because\ \alpha^T\beta=(a_1,a_2,\cdots a_n)\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}a_ib_i=0$，

$\therefore\ \beta^T\alpha=0$ 。 而

$$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_1&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$$

$A^2=(\alpha\beta^{\mathrm{T}})(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=\alpha(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)\beta^{\mathrm{T}}=(\beta^{\mathrm{T}}\alpha)(\alpha\beta^{\mathrm{T}})=0$，

A^2的特征多项式为det（$\lambda E-A^2$）$=\lambda^n$， 由此可得A^2的特征值为 $\lambda=0$（n重）。

（2）利用（1）的结论，求 A 的特征值和特征向量；

解： 设 λ 为 A 的特征值， x 为与之应的 A 的特征向量，即

$Ax=\lambda x$， $A^2x=\lambda Ax=\lambda^2x$ 由于 $A^2=0$，因此 $\lambda^2x=0$，又 $x\neq0$，

$\therefore\ \lambda=0$，

$\therefore$ A 的全部特征值为 0。

由题设知 $\alpha\neq0,\beta\neq0$ 不妨设 $a_1\neq0,b_1\neq0$

解方程（$A-0E$）X=0　由

$$A-0E=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_1 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

得到同解方程组 $a_1(b_1x_1+b_2x_2+\cdots b_nx_n)=0$ 。　令 $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 分别取

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$ 则 $x_1=\frac{b_2}{b_1},\frac{b_3}{b_1},\cdots,\frac{b_n}{b_1}$,

于是得到 A 的属于特征值 $\lambda=0$ 的全部特征向量为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -\frac{b_2}{b_1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -\frac{b_3}{b_1} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+k_{n-1}\begin{pmatrix} -\frac{b_n}{b_1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

k_i $(i=1,2,\cdots,k_{n-1})$ 为不全等于零的任意常数。

（3）是否可以对角化

解： $\because$ 对应于 $\lambda=0$（n重）的特征向量只有 $n-1$ 个，

$\therefore$ A 不能对角化。

10、　A 为三阶矩阵，A 的特征值为 1，3，5。试求行列式 det（A^*-2E) 的值，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵。

解： detA= $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1\times3\times5=15$，

A^* 对应的特征值为 $\eta_1=\frac{\det A}{\lambda_1}=15,\eta_2=\frac{\det A}{\lambda_2}=5,\eta_3=\frac{\det A}{\lambda_3}=3$。

而矩阵 $A*-2E$ 对于的特征值为 η_1-2，η_2-2，η_3-2，

$\therefore$ det（A^*-2E) =$13\times3\times1=39$。

11、 设矩阵 *A*~*B*，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ -3 & -3 & a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & b\end{pmatrix}$$

（1）求 a,b 的值；

解：矩阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda E-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & -1\\ -2 & \lambda-4 & 2\\ 3 & 3 & \lambda-a\end{vmatrix}=\lambda^3-(5+a)\lambda^2+(5a+3)\lambda+6-6a，\quad 又$$

矩阵 A~B $\therefore A$，B 有相同的特征值。

$\therefore$ A 的特征值为 2，2，b，

$\therefore$ $\lambda=2,b$ 时，det（$\lambda E-A)=0$，

由此解得 $a=5,b=6$。

（2）求可逆矩阵 *P*，使 $P^{-1}AP=B$。

解： 由（1）知：A 的特征值为 2，2，6，

对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$，解齐次线性方程组（2E—A）X=0，可得

方程组的一个基础解系为 $\alpha_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$。

对于 λ_3=6，解齐次线性方程组（6E—A）X=0，可得方

程组的一个基础解系 $\alpha_3=(1,-2,3)^{\mathrm{T}}$。

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$， 则 $P^{-1}AP=B$。

12、设矩阵 *A*=$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & y & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$，已知 *A* 的一个特征值为 3，

（1）求 y 的值；（2）求矩阵 *P*。使 $(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$ 为对角矩阵；

解 （1）$\because$ 3 为 A 的一个特征值，

$$\therefore \det(3E-A)=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & y-3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & y-2\end{vmatrix}=8(2-y)=0,$$

$\therefore$ y=2。

（2）$\because A^{\mathrm{T}}=A$，

$\therefore (AP)^{\mathrm{T}}(AP)=P^{\mathrm{T}}A^2P$。

要使$(AP)^{\mathrm{T}}(AP)$为对角矩阵,只需$P^{\mathrm{T}}A^2P$为对角矩阵即可,

$$A^2=AA=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & 4\\ 0 & 0 & 4 & 5\end{pmatrix},$$ 则

A^2的特征多项式为$\det(\lambda E-A^2)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-5 & -4\\ 0 & 0 & -4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^3(\lambda-9)$

由$\det(\lambda E-A^2)=0$,可得A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，$\lambda_4=9$。

对于$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，解齐次线性方程组（$E-A^2$）$X$ =0 可得方程组的一个基础解系为$\alpha_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\alpha_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_3=(0,0,-1,1)^{\mathrm{T}}$，

将向量组α_1，α_2，α_3正交化单位化得

$$\gamma_1=(1,0,0,0)^{\mathrm{T}},\gamma_2=(0,1,0,0)^{\mathrm{T}},\gamma_3=(0,0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}。$$

对于$\lambda_4=9$，解齐次线性方程组（$9E-A^2$）X =0，可得方程组的一个基础解系$\alpha_3=(0,0,1,1)^{\mathrm{T}}$。

将α_3单位化得$\gamma_4=(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})^{\mathrm{T}}$。

令 $P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$，　则

$$P^{\mathrm{T}}A^2P=(AP)^{\mathrm{T}}(AP)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&9\end{pmatrix}。$$

13、 设 A,B 为同阶矩阵。

（1） 如果 A 可逆，证明 AB 与 BA 相似；

证明：$\because A$可逆，故A^{-1}存在。

$\therefore A^{-1}(AB)A=BA$，

$\therefore AB$ 与 BA 相似。

（2） 如果 A 不可逆，试问 AB 与 BA 是否相似？证明你的结论。

证明：相似。用反证法。设 AB 与 BA 不相似，则对任意的可逆矩阵 P，都有

$$P^{-1}ABP\neq BA,$$

上式两边取行列式，得

$$\det(P^{-1}ABP)\neq\det(BA),$$

即 $\det(AB)\neq\det(BA)$，矛盾，所以假设不成立，于是 AB 与 BA 相似。

14、如果实对称矩阵 A 的特征值的绝对值均为 1，证明 A 是正交矩阵。

证明：设 A 的属于 λ 的特征向量为 $\alpha(\alpha\neq 0)$，则 $A\alpha=\lambda\alpha$。

$\therefore A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)$，即 $A^2\alpha=\lambda A\alpha$，又 $A\alpha=\lambda\alpha$，

$\therefore A^2\alpha=\lambda^2\alpha$。　又　$A^{\mathrm{T}}=A,\lambda^2=1$，

$\therefore A^{\mathrm{T}}A\alpha=\alpha$　，又　$\alpha\neq 0$，

$\therefore A^{\mathrm{T}}A=E$，

$\therefore$　A 是正交矩阵。

15 设 A,B 是两个实对称矩阵，试证：存在正交矩阵 Q，使 $Q^{-1}AQ=B$ 的充分必要条件是 A,B 有相同的特征值。

证明：充分性；设实对称矩阵 A,B 有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则 存在正交矩阵

Q_1, Q_2 使得

$$Q_1^{-1}AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad Q_2^{-1}BQ_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

于是 $Q_1^{-1}AQ_1 = Q_2^{-1}BQ_2$，又 Q_2^{-1} 存在，所以有：$Q_2Q_1^{-1}AQ_1Q_2^{-1} = B$

即：$Q^{-1}AQ = B$（其中 $Q = Q_1Q_2^{-1}$）。

必要性：设有 $Q^{-1}AQ = B$，即 A，B 相似，从而 A, B 有相同的特征值。

综合上面的证明知：命题成立。

16、　设 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^2 = A$, 试证：存在正交矩阵 Q，

使 $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,0\cdots0)$。

证明： 设 A 的属于 λ 的特征向量为 $\alpha(\alpha \neq 0)$，则 $A\alpha = \lambda\alpha$ 。 又 $A^2 = A$,

$\therefore \lambda\alpha = A\alpha = A^2\alpha = A(A\alpha) = A(\lambda\alpha) = \lambda^2\alpha$，

$\therefore \lambda = 0$ 或 1 。 又由于 A 为 n 阶实对称矩阵，故存在正交矩阵

$$Q, \text{使得} Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}。$$

17、设 A 为 n 阶实对称矩阵，且 $A^2 = E$, 试证：存在正交矩阵 Q，

使 $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1\cdots-1)$。

证明： 由于 A 为 n 阶实对称矩阵，故存在正交矩阵

$$Q, \text{使得} Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

又 $A^2 = E$,

$\therefore (Q_1^{-1}AQ_1)^2 = Q_1^{-1}A^2Q_1 = E$。 又

$$(Q_1^{-1}AQ_1)^2=\begin{pmatrix}\lambda_1^{\ 2} & & & \\ & \lambda_2^{\ 2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n^{\ 2}\end{pmatrix},$$

$\therefore\ \lambda_i^{\ 2}=1$， 从而 $\lambda_i=\pm 1(i=1,2,\cdots,n)$，

把（1）式对角线上 λ_i 中的+1 集中到前面（交换相同的行与列即乘上适当的正交矩阵）

即存在正交矩阵 Q_2 使得：

$$Q_2^{\ -1}Q_1^{\ -1}AQ_1Q_2=Q_2^{\ -1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}Q_2=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1\end{pmatrix}$$

即 $Q^{-1}AQ=\mathrm{diag}(1,\cdots 1,-1,\cdots -1)$（其中 $Q=Q_1Q_2$）。