傅里叶级数

一、三角级数,三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数或余弦级数

一. 三角级数　三角函数系的正交性

在高等数学学习当中，接触两类基函数:

$$u_n(x) = x^n \quad 1, x, x^2, x^3 \cdots x^n \cdots$$

$$u_n(x) = \begin{cases} \sin nx \\ \cos nx \end{cases} \quad 1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x \cdots \sin nx, \cos nx \cdots$$

函数在一点的性质　$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

周期函数(整体性质)　Fourier级数

三角级数 表达周期函数

(一) 三角级数 表达周期函数

简单的周期运动： $y = A\sin(\omega t+\varphi)$

A 为振幅， ω 为角频率， φ 为初相.

复杂的周期运动：

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

谐波分析

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t)$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0$， $a_n = A_n \sin\varphi_n$， $b_n = A_n \cos\varphi_n$， $\omega t = x$,

得级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 称为三角级数.

1757年,法国数学家克莱罗在研究太阳引起的摄动时,大胆地采用了三角级数表示函数:

$$f(x)=A_0+2\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos nx\,.$$

其中 $A_n=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\,.$

1759年,拉格朗日在对声学的研究中使用了三角级数.

1777年,欧拉在天文学的研究中,用三角函数的正交性得到了将函数表示成三角函数时的系数.

也就是现今教科书中傅立叶级数的系数.

在历史上，三角级数的出现和发展与求解微分方程是分不开的.

1753年.丹·贝努利首先提出将弦振动方程的解表示为三角级数的形式，

这为傅立叶级数题奠定了物理基础,促进了它的发展.

1822年,傅立叶在«热的解析理论»一书中

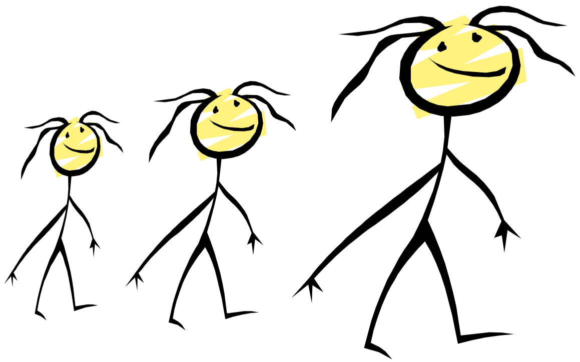
对于欧拉和贝努利等人就一些孤立的,特殊的情形采用的三角级数方法进行加工处理,发展成一般理论.

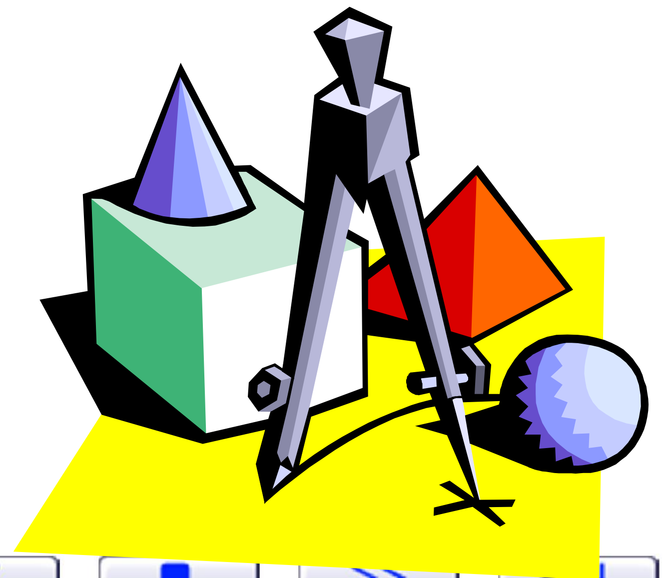
傅立叶指出：任意定义在$(-\pi,\pi)$上的有界函数$f(x)$可以展开成级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

其中 $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 0,1,2\ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n = 1,2\ldots).$$





(二)、三角函数系的正交性

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

在 $[-\pi, \pi]$ 上正交，即其中任意两个不同的函数之积在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分等于 0 .

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, \mathrm{d}x$$

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x = 0 \, (k \neq n)$$

同理可证 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分不等于 0．且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot 1\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi \qquad (n=1,2,\cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,\mathrm{d}x = \pi$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2},\quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

二、函数展开成傅里叶级数

问题: 1. 若函数能展开成三角级数，a_i, b_i是什么?

2. 展开的条件是什么?

设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数,

且能展开成三角级数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

(1) 求 a_0.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi,$$

则 $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x$.

(2) 求 a_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x$$ (利用正交性)

$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\mathrm{d}x]$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\mathrm{d}x = a_n \pi,$$

则 $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,3,\cdots).$$

(3) 求 b_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\mathrm{d}x = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\mathrm{d}x$$

(利用正交性)

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx\mathrm{d}x + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\mathrm{d}x] = b_n \pi,$$

则 $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,3,\cdots).$$

傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, & (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, & (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

代入傅里叶系数的三角级数称为傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

问题: 在什么条件下函数可以展开成傅里叶级数?

$$f(x)\underline{\underline{\text{条件?}}}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

狄利克雷于1829年第一次对于傅立叶级数的收敛性给出了严格的证明.

得到了现今教科书中的所谓狄利克雷判定准则.

定理 (收敛定理, 展开定理)　设 $f(x)$ 是周期为2π的周期函数, 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数. (证明略)

注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

狄利克雷, P.G.L.

既

1. 设 $x_0 \in (-\pi, \pi)$ 是 $f(x)$ 的连续点， 则有

$$S(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = f(x);$$

2. 设 $x \in (-\pi, \pi)$ 是 $f(x)$ 的间断点，则有

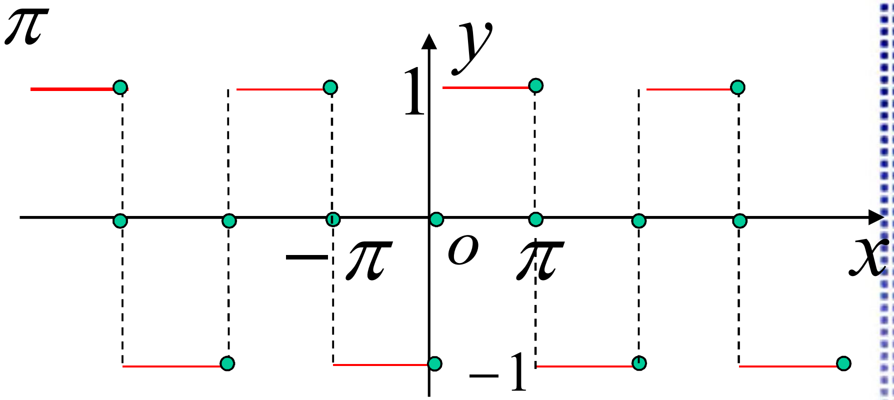
$$S(x) = \frac{1}{2}[f(x-0) + f(x+0)];$$

3. 当 $x = -\pi, \pi$ 时， 有

$$S(x) = \frac{1}{2}[f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

例1. 设 $f(x)$ 是**周期为 2π** 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$$



将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

解: 先求傅里叶系数

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nx\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=0\qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{0}^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\left[1-\cos n\pi\right]$$

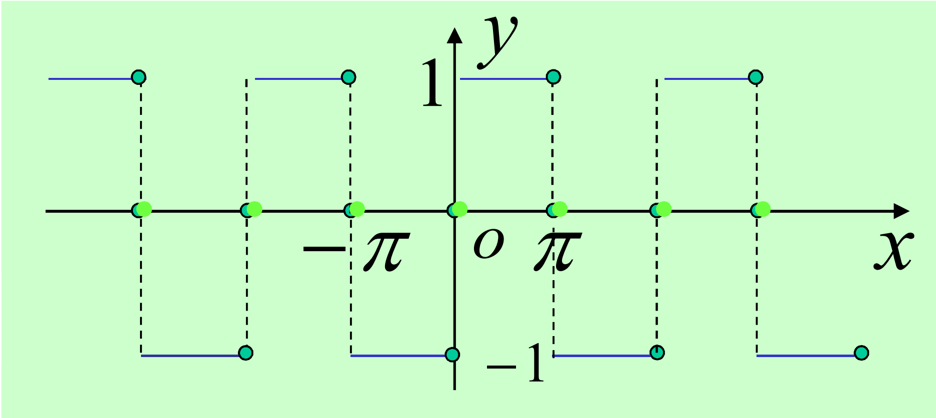
$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{当 } n = 1, 3, 5, \cdots \\ 0, & \text{当 } n = 2, 4, 6, \cdots \end{cases}$$

$$\therefore f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x + \cdots\right]$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \cdots)$$

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty\,,\ x\neq 0\,,\pm\pi\,,\pm 2\pi\,,\cdots)$$



说明:

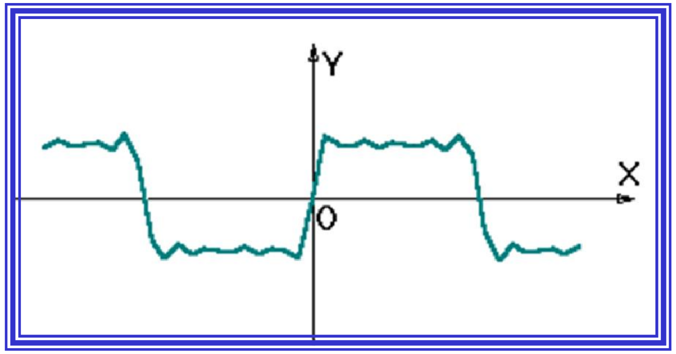
1) 根据收敛定理可知,

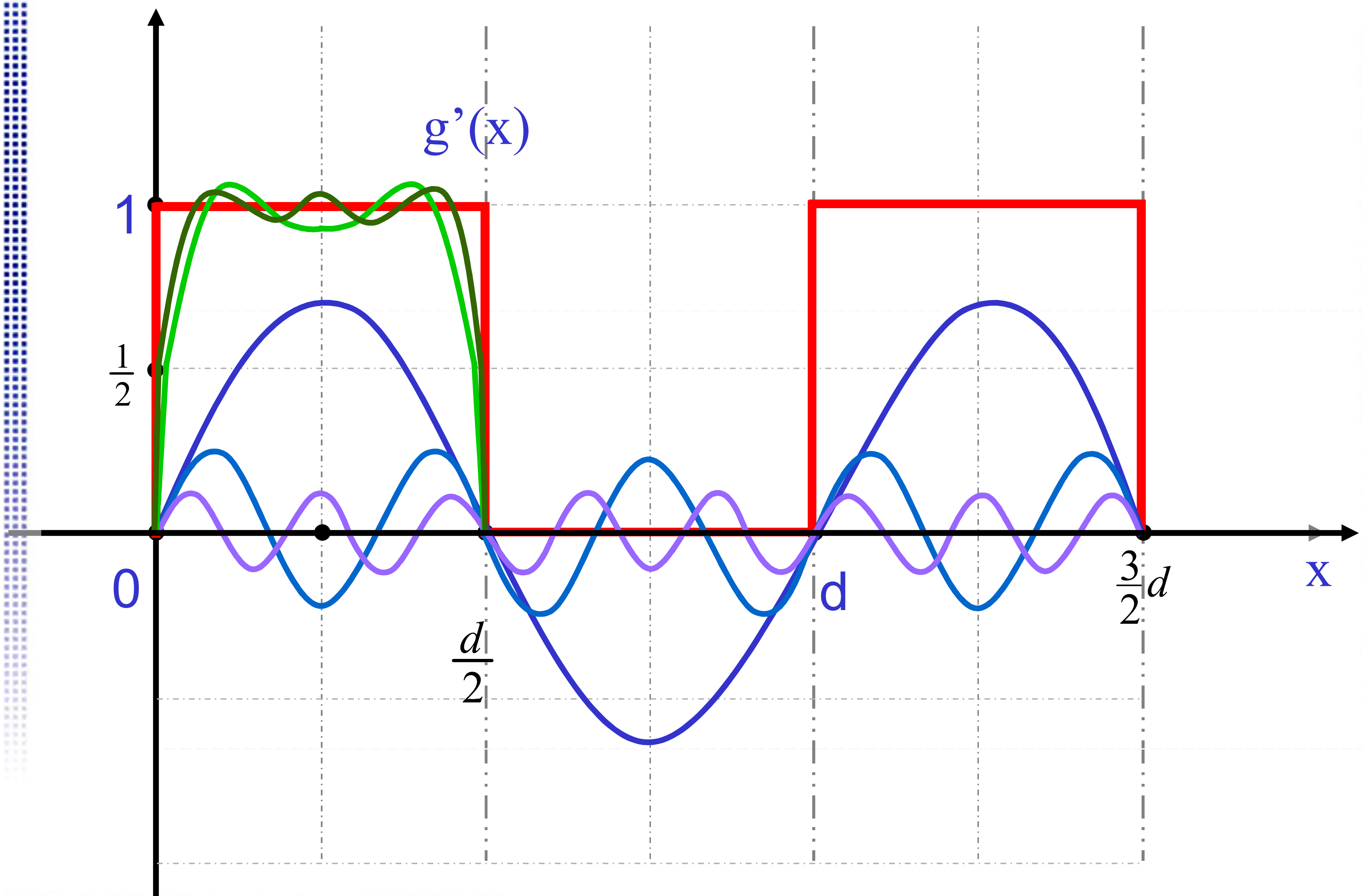
当 $x=k\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$

时, 级数收敛于 $\dfrac{-1+1}{2}=0$

2) 傅氏级数的部分和逼近

$f(x)$ 的情况见右图.



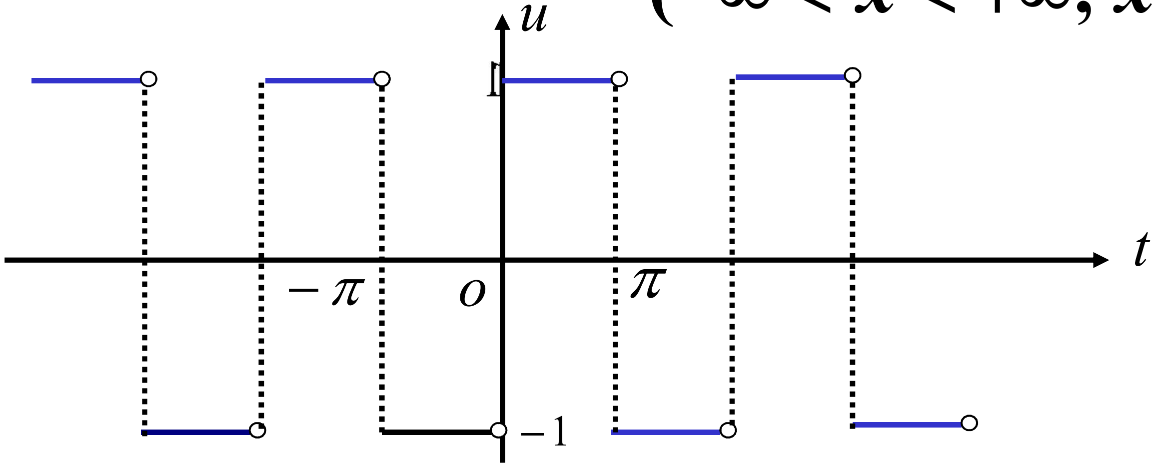


g'(x)
1
$\frac{1}{2}$
0
$\frac{d}{2}$
d
$\frac{3}{2}d$
x

物理意义

$$f(x)=\frac{4}{\pi}[\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x+\cdots]$$

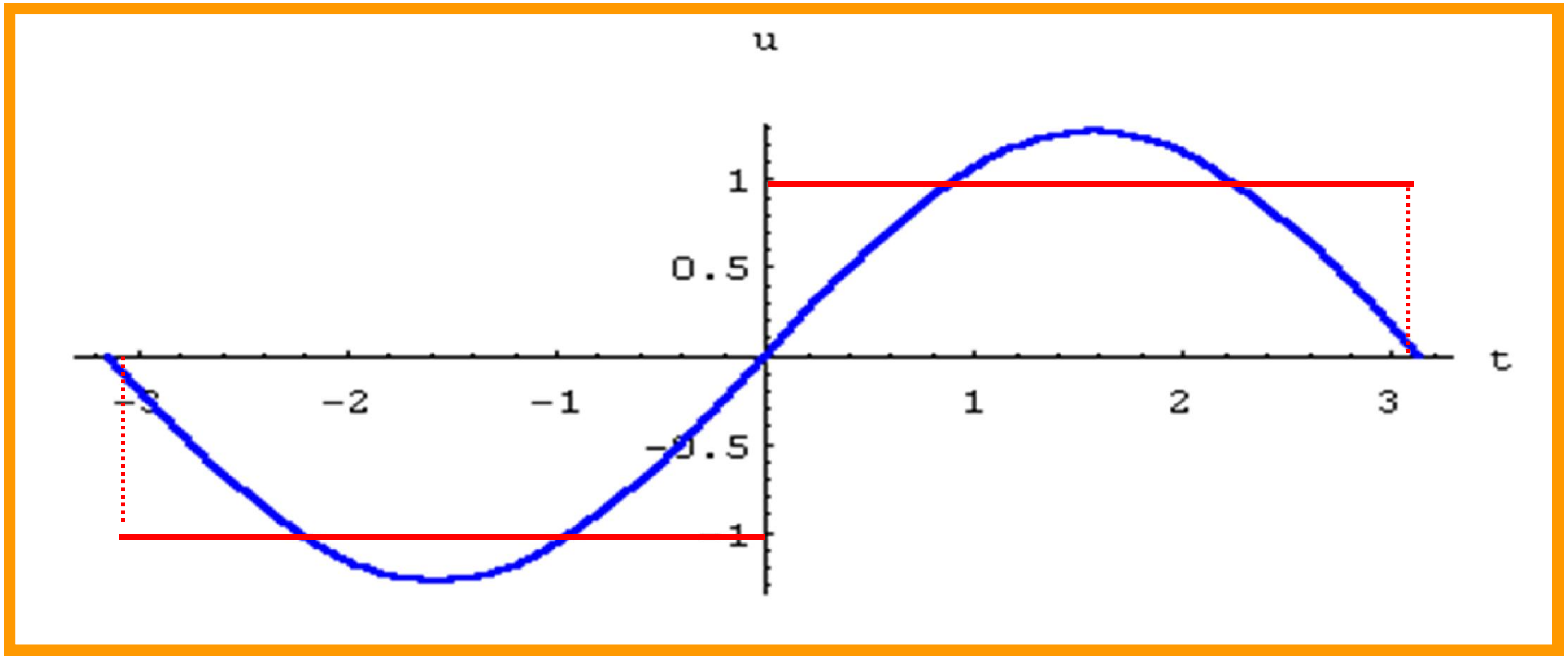
$$(-\infty < x < +\infty;\ x \neq 0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots).$$



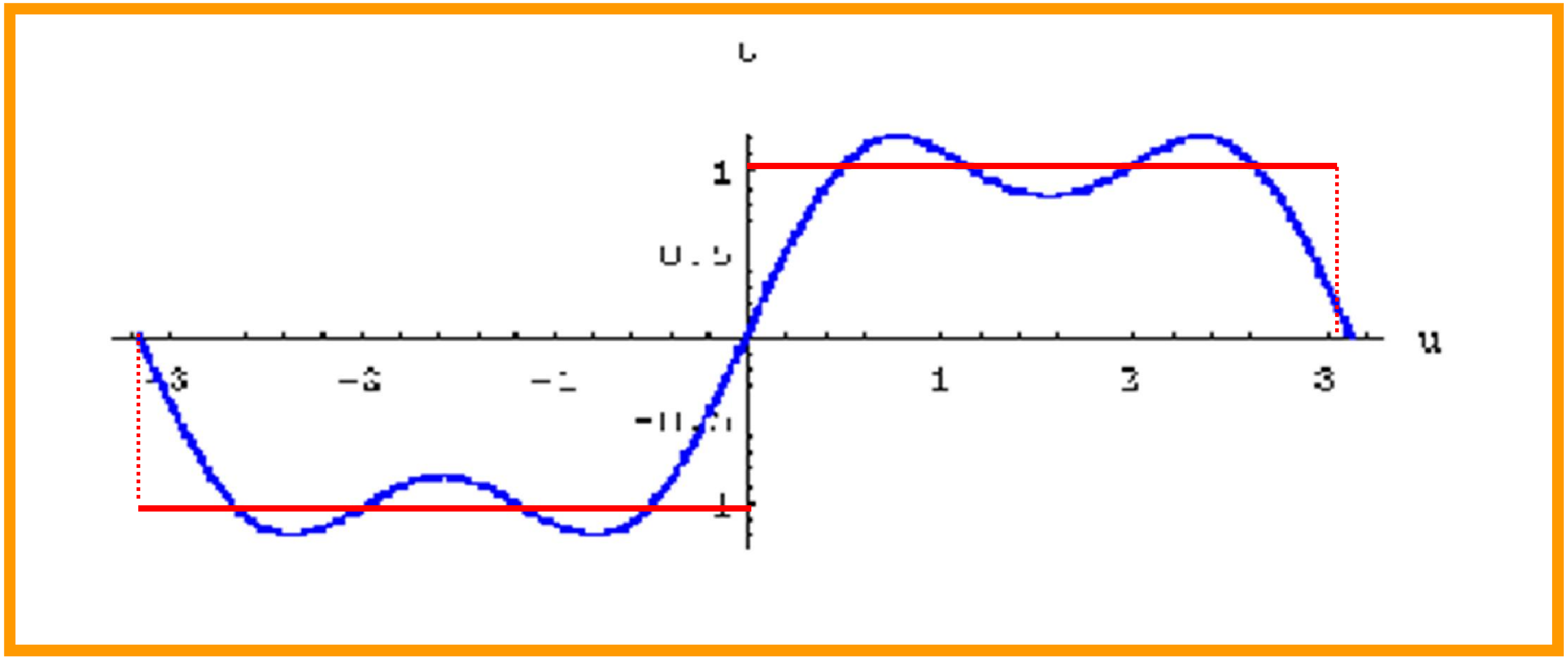
不同频率正弦波逐个叠加成方波

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$

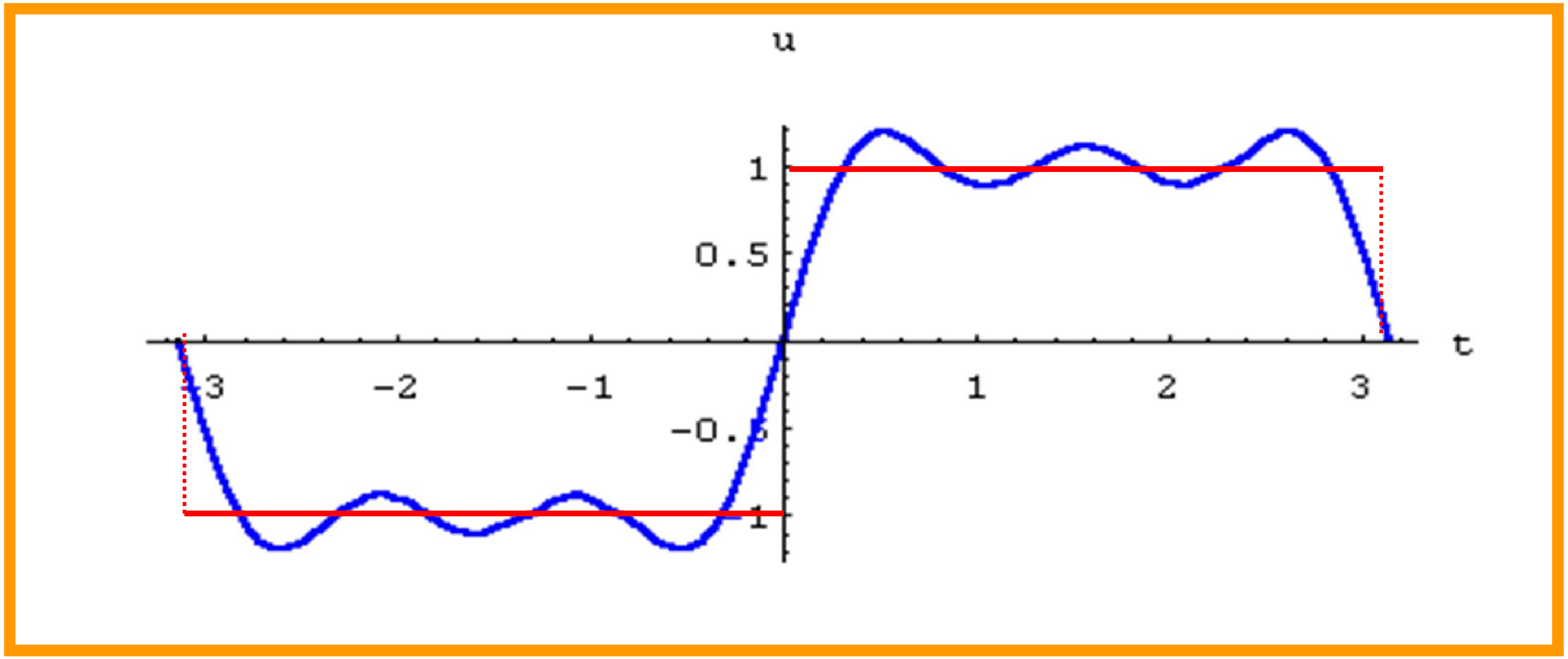
$$u=\frac{4}{\pi}\sin t$$



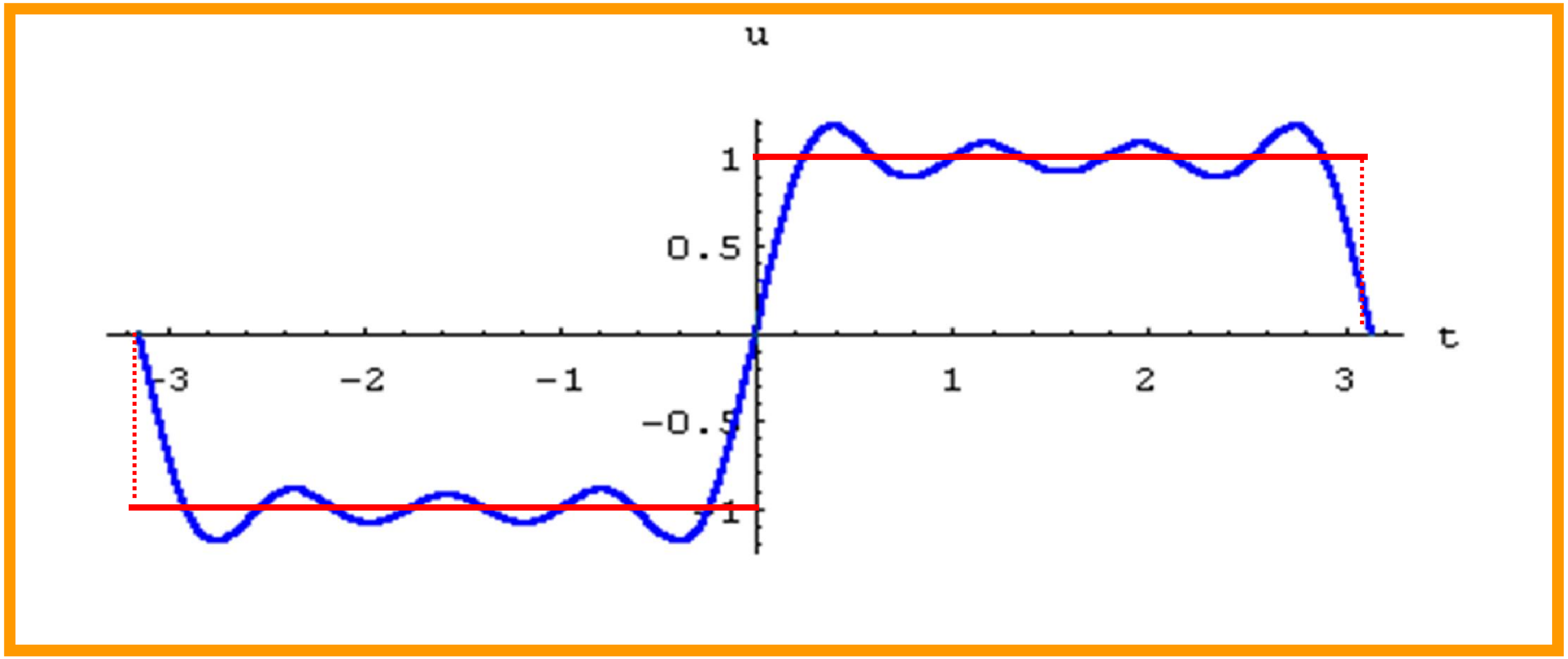
$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t)$$



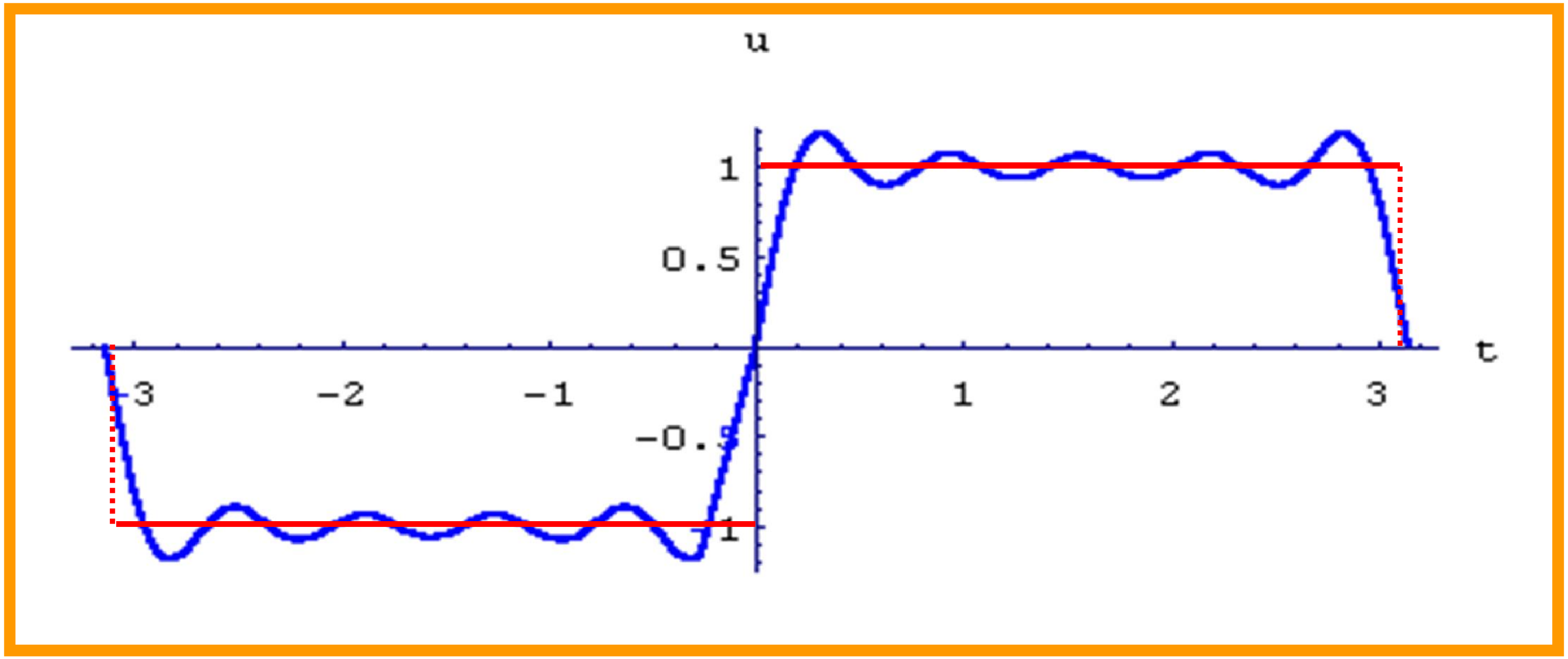
$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t)$$



$$u = \frac{4}{\pi}(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t)$$



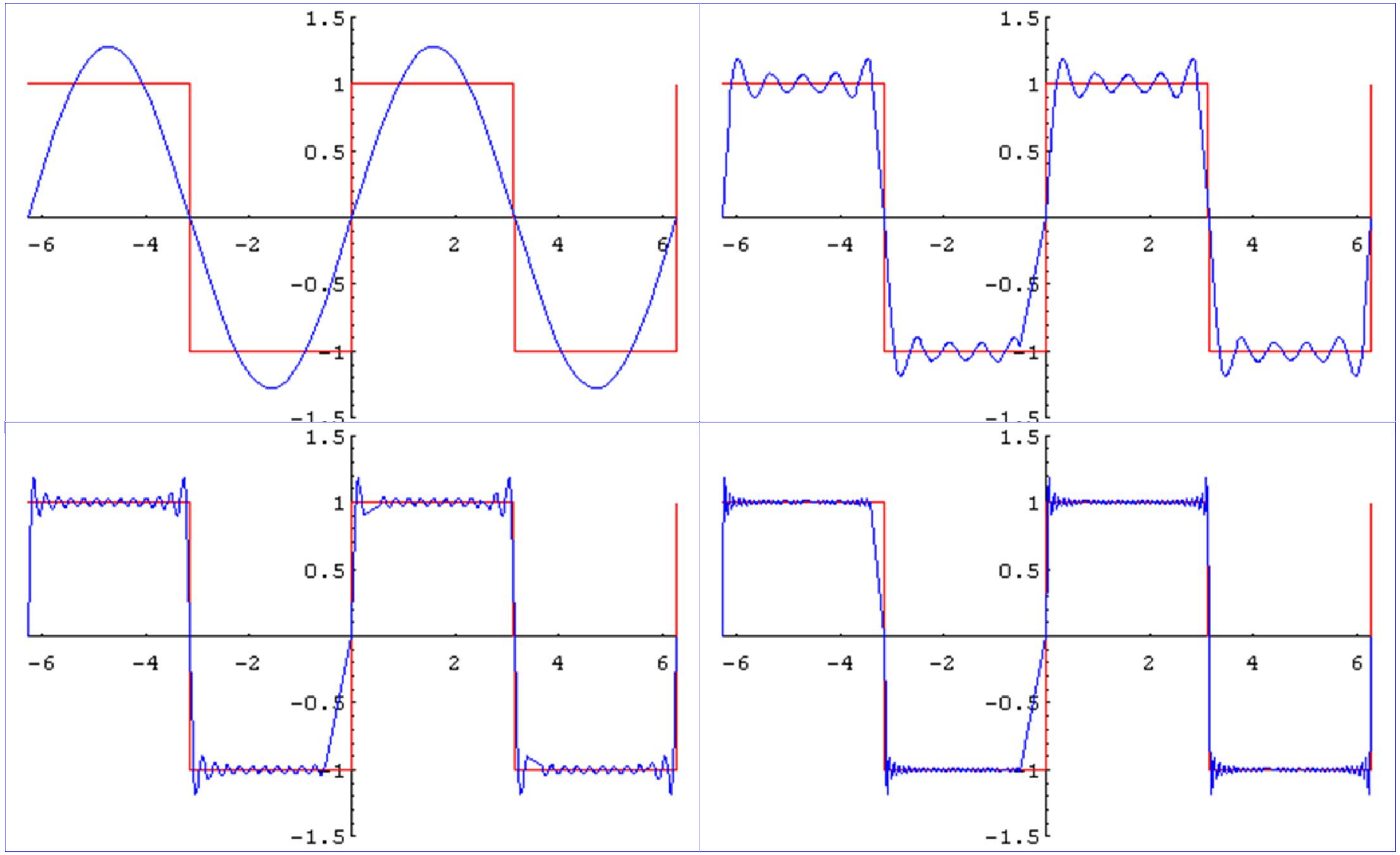
$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$



$$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

傅里叶级数展开式的意义——函数的整体逼近.



例2 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在上的表达式为 $f(x)=\begin{cases} x, & -\pi \le t < 0 \\ 0, & 0 \le x < \pi \end{cases}$

将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数 .

解 所给函数满足狄利克雷充分条件.

在点 $x=(2k+1)\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 处不连续.

收敛于 $\dfrac{f(-\pi^- + \pi^+)}{2} = \dfrac{0-\pi}{2} = -\dfrac{\pi}{2}.$

在连续点 $x(x \neq (2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$.

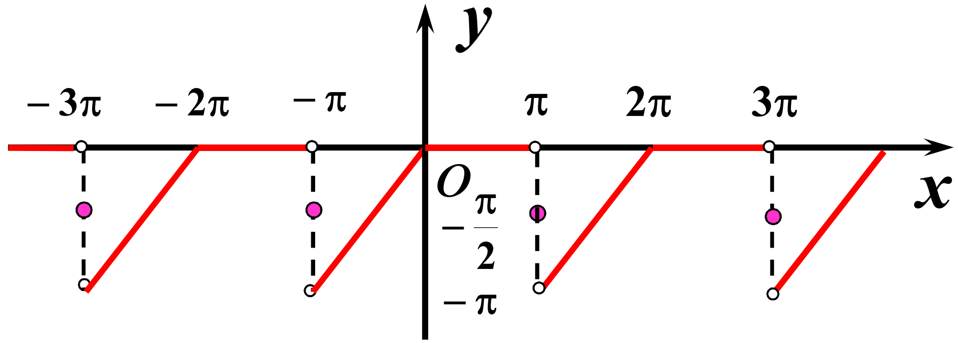
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-\cos n\pi}{n^2\pi}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$



$$f(x) = -\frac{\pi}{4} + (\frac{2}{\pi}\cos x + \sin x)$$

$$-\frac{1}{2}\sin 2x + (\frac{2}{3^2\pi}\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x)$$

$$-\frac{1}{4}\sin 4x + (\frac{2}{5^2\pi}\cos 5x + \frac{1}{5}\sin 5x) - \cdots$$

$$(-\infty < x < +\infty,\ x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \ \cdots)$$

非周期函数展开成傅里叶级数

如果函数 $f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义，即非周期函数， 并且满足收敛定理的条件，可利用周期的延拓展开成傅里叶级数，

在 $[-\pi,\pi)$ 或 $(-\pi,\pi]$ 外补充函数定义，把它拓广成周期为2π的周期函数$F(x)$.

周期延拓 $(T=2\pi)$ $\quad F(x)=f(x) \quad (-\pi,\pi)$

端点处收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(\pi^-)+f(-\pi^+)]$

定义在$[-\pi,\pi]$上的函数$f(x)$的傅氏级数展开法

$$f(x),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

$\Big\downarrow$ 周期延拓

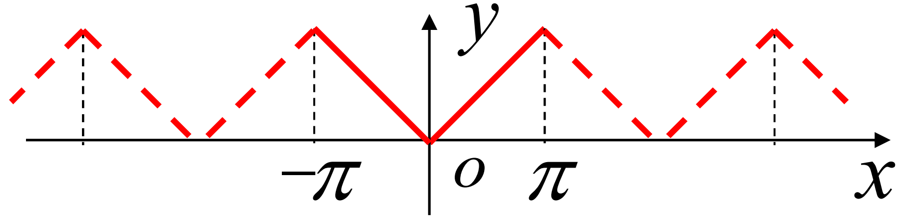
$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi) \\ f(x-2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

$\Big\downarrow$ 傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数

例3. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x\,, & -\pi\le x<0\\ x\,, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展成傅里叶级数 .

解: 将 $f(x)$延拓成以 2π为周期的函数 $F(x)$,则



$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\pi$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n = 2k-1 \\ 0, & n = 2k \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = 0$$

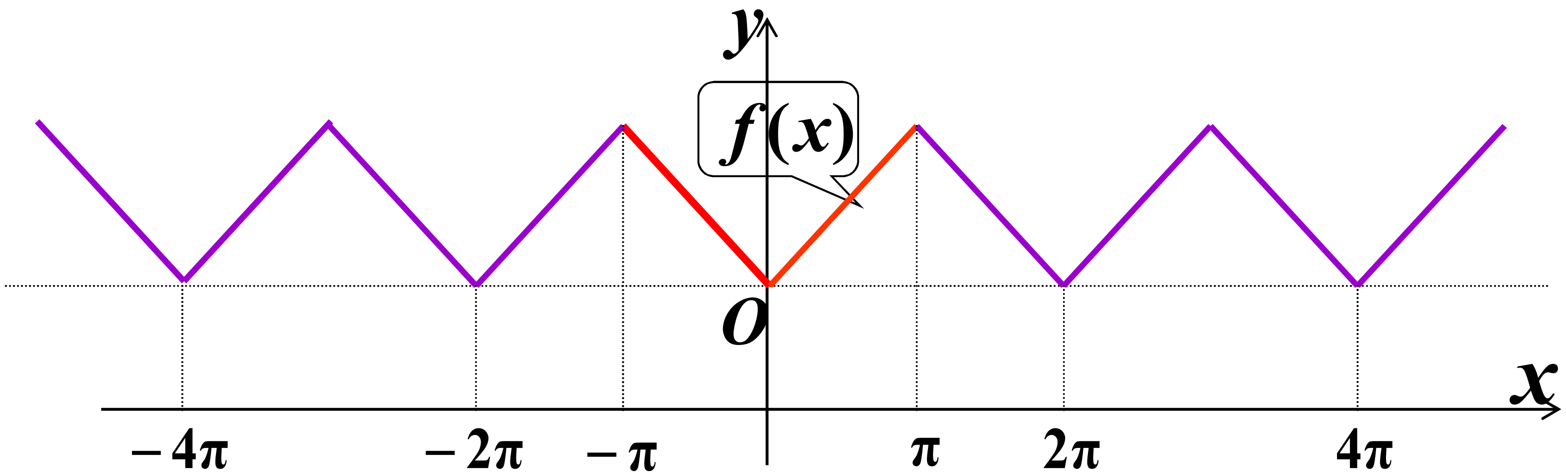
$$\therefore f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right)$$

$$(-\pi \le x \le \pi)$$

物理意义

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x$$

$$(-\pi\le x\le\pi)$$



不同频率余弦波逐个叠加成锯齿波

利用此傅氏展开式求几个特殊的级数的和

因为有 $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)x,$

当 $x=0$ 时, $f(0)=0,$ $\qquad \frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots,$

设 $\quad \sigma=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots,$

$$\sigma_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\left(=\frac{\pi^2}{8}\right),$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots,$$

$$\sigma_3 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots,$$

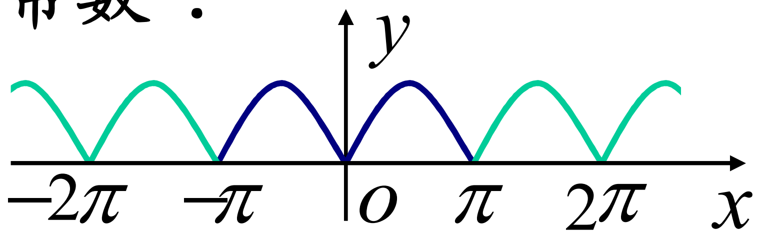
因为$\sigma_2 = \frac{\sigma}{4} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{4}$， 所以$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{3} = \frac{\pi^2}{24}$,

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sigma_3 = 2\sigma_1 - \sigma = \frac{\pi^2}{12}.$$

例4. 将函数 $u(t)=\left|E\sin t\right|$ $t\in[-\pi,\pi]$

展成傅里叶级数, 其中E 为正常数 .

解: $u(t)$ 延拓成以2π为周期的函数



$$b_n=0\quad(n=1,2,\cdots);$$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{4E}{\pi}$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E\sin t\cos nt\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)t-\sin(n-1)t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)t - \sin(n-1)t\right)\mathrm{d}t$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{4E}{(4k^2-1)\pi}, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$a_1 = \frac{E}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2t\,\mathrm{d}t = 0$$

$$\therefore\ u(t) = \frac{2E}{\pi} - \frac{4E}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$

$$= \frac{4E}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\cos 2t - \frac{1}{15}\cos 4t - \frac{1}{35}\cos 6t - \cdots\right)$$

例5 设 $f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi < x \le 0 \\ x^2+1, & 0 < x \le \pi \end{cases}$ 则以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于（ ）

解 显然 $f(x)$ 满足收敛定理的条件,

其傅里叶级数在 $x=\pi$ 处的和为 $f(\pi^-)$ 与 $f(-\pi^+)$ 的平均值,即

$$\frac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\frac{(\pi^2+1)+(-1)}{2}=\frac{\pi^2}{2}.$$

故应填入 $\frac{\pi^2}{2}$.

三、正弦级数或余弦级数

1.奇函数与偶函数的傅里叶级数

(1) 当周期为 2π 的奇函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时，它的傅里叶系数为

$$a_n = 0 \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

(2) 当周期为 2π 的偶函数 $f(x)$ 展开成傅里叶级数时，它的傅里叶系数为

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = 0 \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

证　(1) 设 $f(x)$ 是奇函数，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\cos nx\mathrm{d}x}_{\text{奇函数}}=0\qquad(n=0,1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{f(x)\sin nx\mathrm{d}x}_{\text{偶函数}}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

同理可证(2).

证毕

定义

如果 $f(x)$ 为奇函数，傅里叶级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ 称为正弦级数.

如果 $f(x)$ 为偶函数，傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 称为余弦级数.

例 1　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=x$，将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数

解　所给函数满足狄利克雷充分条件.

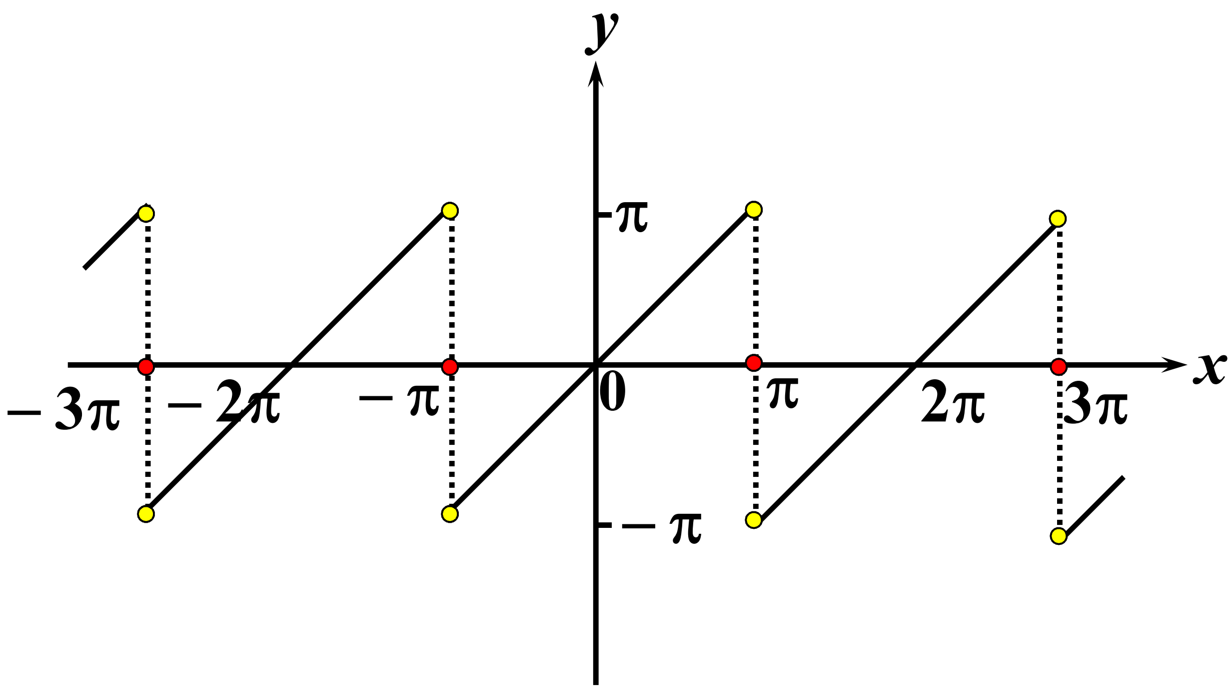
在点 $x=(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 处不连续,

收敛于 $\dfrac{f(\pi^-)+f(-\pi^+)}{2}=\dfrac{\pi+(-\pi)}{2}=0,$

在连续点 x $(x\neq(2k+1)\pi)$ 处收敛于 $f(x)$,

因为 $x\neq(2k+1)\pi$ 时 $f(x)$ 是以 2π 为周期的奇函数,

和函数图象



所以 $a_n = 0, \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}, \qquad (n = 1,2,\cdots)$$

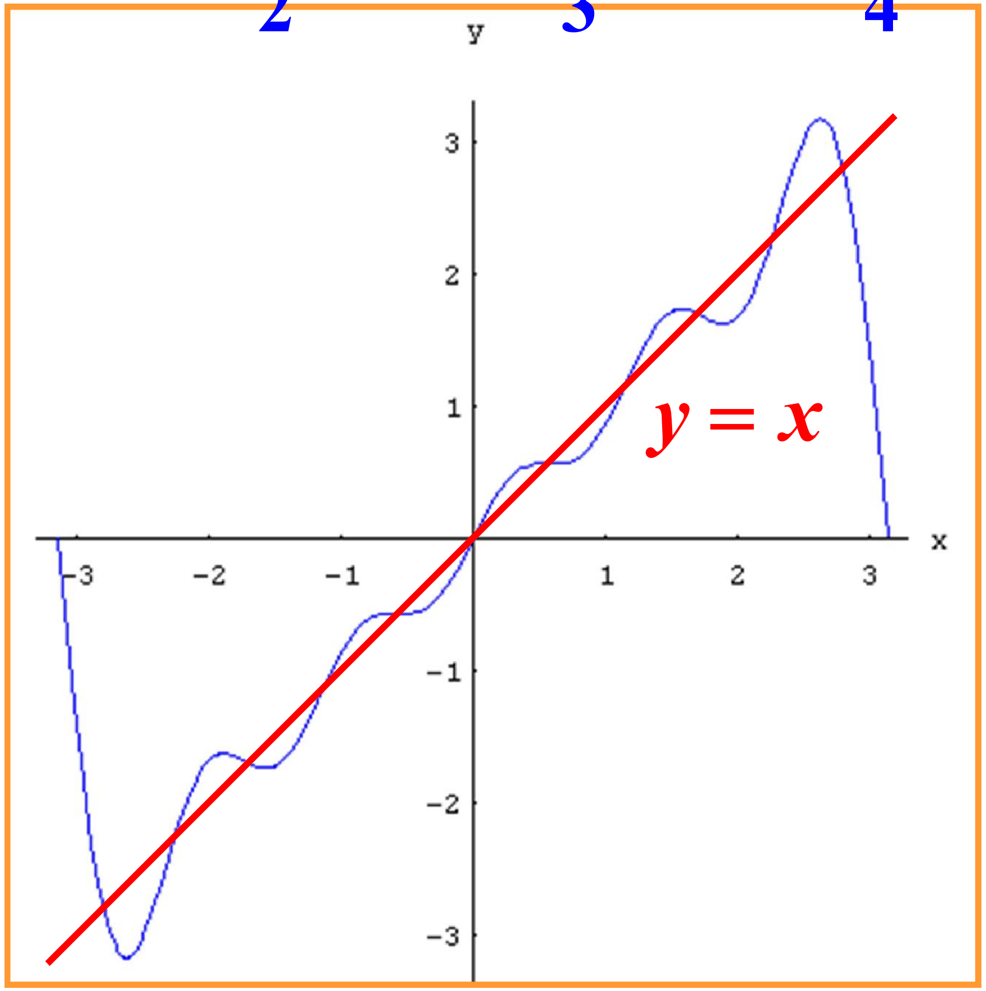
$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \cdots)$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

$$(-\infty < x < +\infty;\ x \neq \pm\pi, \pm 3\pi, \cdots)$$

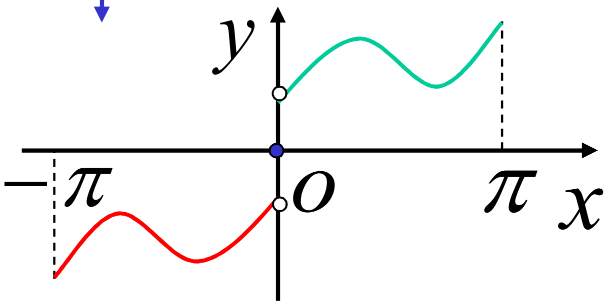
$$y = 2(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{5}\sin 5x)$$

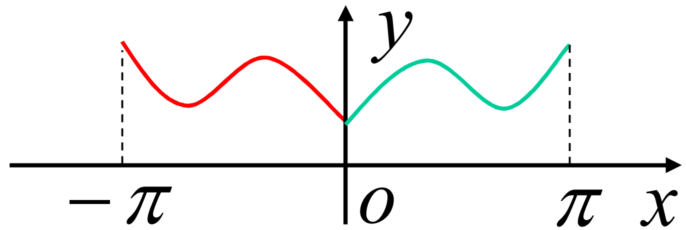
观察两函数图形



2. 在[0,π]上的函数展成正弦级数与余弦级数

奇延拓　$f(x),\ x\in[0,\pi]$　偶延拓





$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成余弦级数

例1. 将函数 $f(x)=x+1\ (0\le x\le \pi)$ 分别展成正弦级数与余弦级数 .

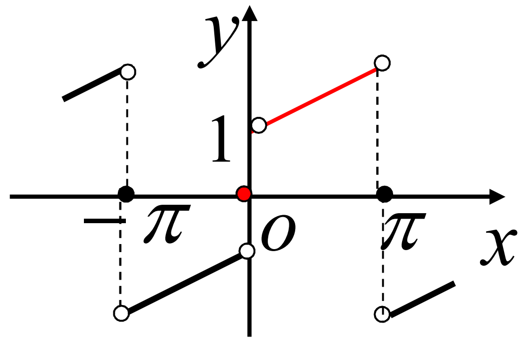
解: 先求正弦级数. 去掉端点, 将 $f(x)$ 作奇周期延拓,

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}\,x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\sin nx\,\mathrm{d}\,x$$

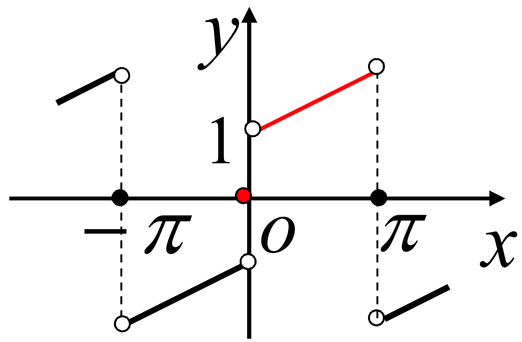
$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\cos nx}{n}+\frac{\sin nx}{n^2}-\frac{\cos nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{n\pi}\left(1-\pi\cos n\pi-\cos n\pi\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n=2k-1\\[2ex] -\dfrac{1}{k}, & n=2k\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$



$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\cdot\dfrac{\pi+2}{2k-1}, & n = 2k-1 \\ -\dfrac{1}{k}, & n = 2k \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$



因此得

$$x + 1 = \frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x - \frac{\pi}{2}\sin 2x \right.$$

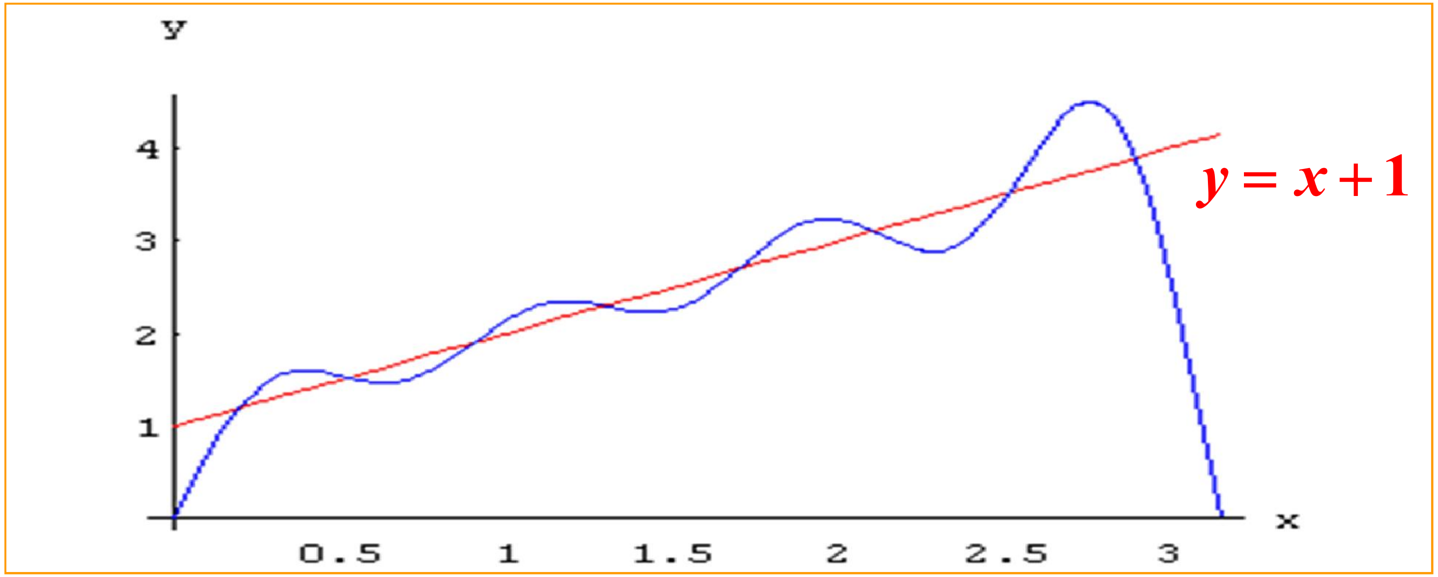
$$\left. + \frac{\pi+2}{3}\sin 3x - \frac{\pi}{4}\sin 4x + \cdots \right] \quad (0 < x < \pi)$$

注意: 在端点 $x = 0, \pi$，级数的和为0，与给定函数 $f(x) = x + 1$ 的值不同 .

$$x+1=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\cdots\right]$$

$$(0<x<\pi)$$

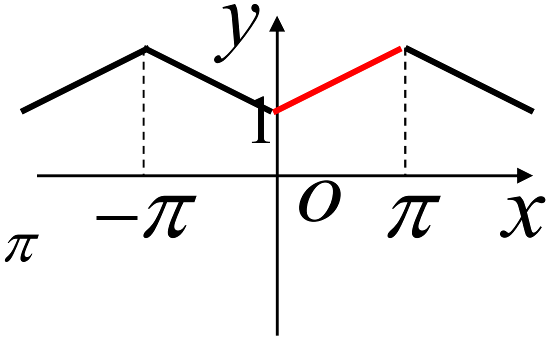
$$y=\frac{2}{\pi}\left[(\pi+2)\sin x-\frac{\pi}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}(\pi+2)\sin 3x-\frac{\pi}{4}\sin 4x+\frac{1}{5}(\pi+2)\sin 5x\right]$$



再求余弦级数.　　将 $f(x)$ 作,偶周期延拓　则有

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi+2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,\mathrm{d}x$$



$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{\sin nx}{n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1)$$

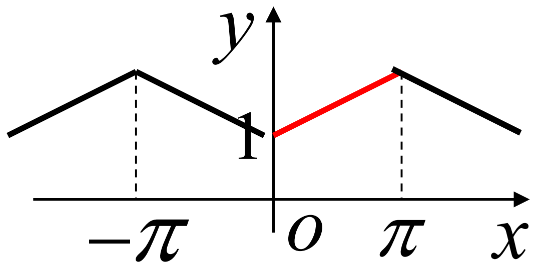
$$= \begin{cases} -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi}, & n=2k-1 \\ \mathbf{0}, & \boldsymbol{n=2k} \end{cases} \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$x+1=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$$

$$=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}\left[\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right]$$

$$(0\le x\le\pi)$$

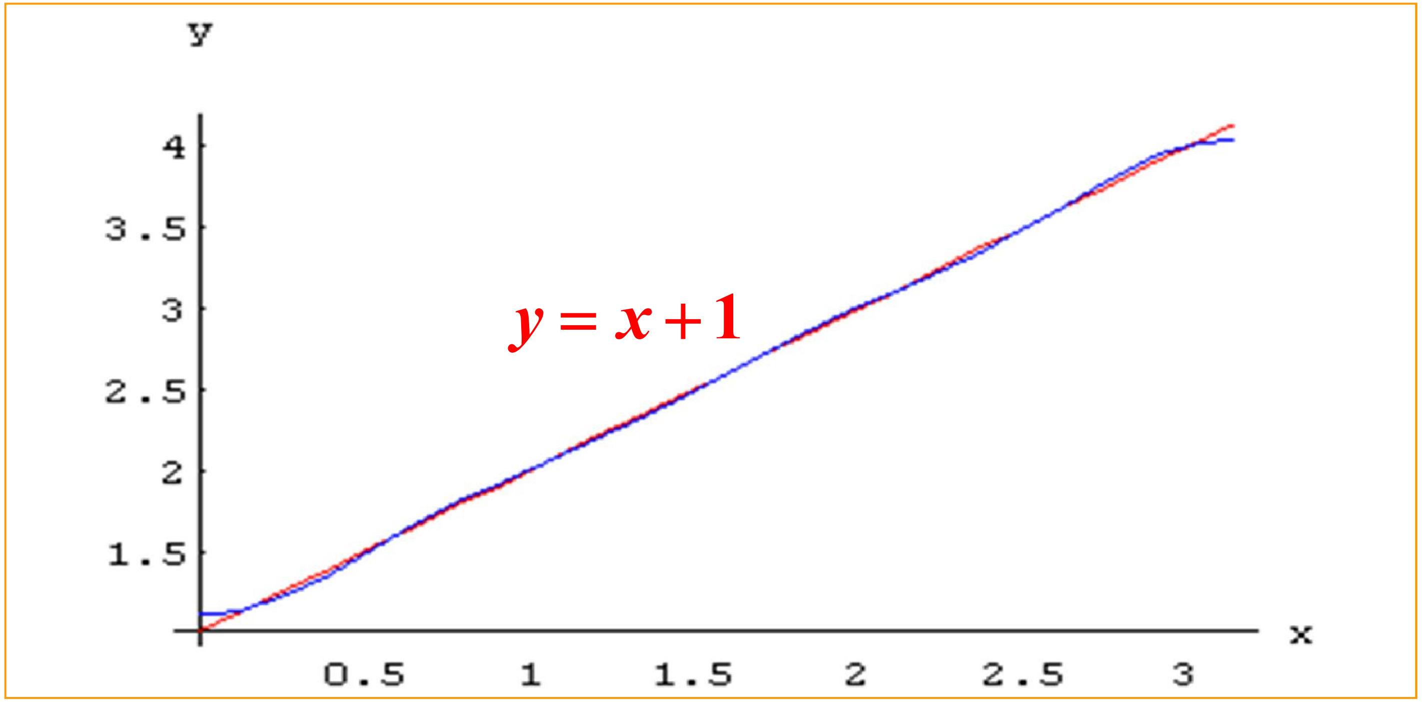
说明: 令 $x=0$ 可得



$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}$$

即 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$y=\frac{\pi}{2}+1-\frac{4}{\pi}(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\frac{1}{7^2}\cos 7x)$$



内容小结

1. 周期为 2π 的函数的傅里叶级数及收敛定理

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\quad(x\neq\text{间断点})$$

其中

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$$

注意: 若 x_0 为间断点, 则级数收敛于 $\dfrac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2}$

2. 周期为 2π 的奇、偶函数的傅里叶级数

- 奇函数 $\longrightarrow$ 正弦级数
- 偶函数 $\longrightarrow$ 余弦级数

3. 在 $[0, \pi]$ 上函数的傅里叶展开法

- 作奇周期延拓，展开为正弦级数
- 作偶周期延拓，展开为余弦级数

思考与练习

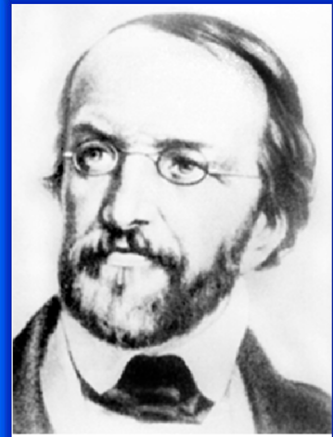
1. 在 $[0, \pi]$ 上的函数的傅里叶展开法唯一吗？

答: 不唯一，延拓方式不同级数就不同.

傅里叶 (1768 – 1830)

法国数学家. 他的著作《热的解析理论》(1822) 是数学史上一部经典性文献, 书中系统的运用了三角级数和三角积分, 他的学生将它们命名为傅里叶级数和傅里叶积分. 他深信数学是解决实际问题最卓越的工具. 以后以傅里叶著作为基础发展起来的傅里叶分析对近代数学以及物理和工程技术的发展都产生了深远的影响.

狄利克雷 (18 05 – 1859)



狄利克雷，P.G.L.

德国数学家. 对数论, 数学分析和数学物理有突出的贡献, 是解析数论的创始人之一， 他是最早提倡严格化方法的数学家. 1829年他得到了给定函数 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛的第一个充分条件;证明了改变绝对收敛级数中项的顺序不影响级数的和, 并举例说明条件收敛级数不具有这样的性质. 他的主要论文都收在《狄利克雷论文集 (1889—1897)中.