

引言

- 傅里叶在家19个孩子中排行最小
- 一个戏剧性的豁免并结识拿破仑的死刑犯
- 在拿破仑政府工作
- 参加一次在埃及的科学考察，总结出一部21卷的巨著，奠定了现代埃及学的基础
- 他工作得到认可，但好喜欢他的数学研究，甚至想自愿流放以获得更多的自由

傅里叶的两个最主要的贡献——

- “周期信号都可表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”

——傅里叶的第一个主要论点

- “非周期信号都可表示为正弦信号的加权积分”

——傅里叶的第二个主要论点

世纪	年代	人名	主要贡献
18	1748	Euler	弦振动分析
	1753	Lagrange	
	1767	Bernoulli	
19	1804-1822	Fourier	级数展开、积分
	1805 – 1893	Parseval	能量守恒（时域与变域）
	1807	Lacroix,Monge,Laplace	支持傅里叶论文
	1823	Cauchy	积分
	1829	Dirichlet	级数与积分的条件
	1887 – 1898	Gibbs,Michelson	吉布斯现象

世纪	年代	人名	主要贡献
20	1900	Marconi	无线电、LC回路
	1902	Lebesgue	积分、收敛条件
	1923	Walsh	广义正交函数的分解
	1928	Nyquist	抽样定理
	1935	Wiener	功率谱等
	1948	Shannon	信息论
	1950	Schwartz	广义函数、脉冲函数
	1965	Cooley, Toker	FFT算法
	1984 – 1989	Morlet, Grossman Daubechies Mallat	小波变换
	1990		分数傅里叶变换

一 引言

将函数表示为不同频率函数的线性组合

⊕ 从信号分析的角度

将信号表示为不同频率正（余）弦分量的线性组合

信号间进行比较、分析、处理

⊕ 从系统分析角度

通过单频正弦信号激励下的响应，可求得总响应

离散余弦变换（DCT）及其应用

- 离散余弦变换（Discrete Cosine Transform, DCT）的变换核为余弦函数。DCT除了具有一般的正交变换性质外，它的变换阵的基向量能很好地描述人类语音信号和图像信号的相关特征。因此，在对语音信号、图像信号的变换中，DCT变换被认为是一种准最佳变换。近年颁布的一系列视频压缩编码的国际标准建议中，都把DCT作为其中的一个基本处理模块。除此之外，DCT还是一种可分离的变换。

离散余弦变换（DCT）及其应用

• 1.1 一维离散余弦变换

一维CT的变换核定义为：

$$g(x, u) = C(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (1-1)$$

式中， $x, u=0, 1, 2, \dots, N-1$ ；

$$C(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & u = 0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases} \quad (1-2)$$

一维DCT定义如下： 设 $\{f(x)|x=0, 1, \dots, N-1\}$ 为离散的信号列。

离散余弦变换（DCT）及其应用

$$F(u) = C(u) \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (1-3)$$

式中， $u, x=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

将变换式展开整理后，可以写成矩阵的形式，即

$$F = Gf \quad (1-4)$$

其中

$$G = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{N} \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \end{bmatrix} \\ \sqrt{2/N} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2N) & \cos(3\pi/2N) & \cdots & \cos((2N-1)\pi/2N) \end{bmatrix} \\ \sqrt{2/N} \begin{bmatrix} \cos(\pi/2N) & \cos(6\pi/2N) & \cdots & \cos((2N-1)\pi/2N) \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \sqrt{2/N} \begin{bmatrix} \cos((N-1)\pi/2N) & \cos((N-1)(3\pi/2N) & \cdots & \cos((N-1)(2N-1)\pi/2N) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

一维DCT的逆变换IDCT定义为

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=0}^{N-1} C(u) F(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad (1-6)$$

式中， $x, u=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。可见一维DCT的逆变换核与正变换核是相同的。

离散余弦变换（DCT）及其应用

• 1.2 二维离散余弦变换

考虑到两个变量，很容易将一维DCT的定义推广到二维DCT。其正变换核为

$$g(x, y, u, v) = \frac{2}{\sqrt{MN}} C(u)C(v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \quad (1-7)$$

式中， $C(u)$ 和 $C(v)$ 的定义同式（7-48）； $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

二维DCT定义如下：设 $f(x, y)$ 为 $M \times N$ 的数字图像矩阵，则

$$F(u, v) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) C(u)C(v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \quad (1-8)$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

式中： $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$; $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

二维DCT逆变换定义如下：

$$f(x, y) = \frac{2}{\sqrt{MN}} \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} C(u)C(v)F(u, v) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \quad (1-9)$$

式中： $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$; $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

类似一维矩阵形式的DCT，可以写出二维DCT的矩阵形式如下：

$$F = GfG^T \quad (1-10)$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

同时，由式(1-8)和式(1-9)可知二维DCT的逆变换核与正变换核相同，且是可分离的，即

$$\begin{aligned} g(x, y, u, v) &= g_1(x, u)g_2(y, v) \\ &= \frac{2}{\sqrt{M}} C(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2M} \cdot \frac{2}{\sqrt{N}} C(v) \cos \frac{(2y+1)v\pi}{2N} \end{aligned} \quad (1-11)$$

式中： $C(u)$ 和 $C(v)$ 的定义同式（1-2）； $x, u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ； $y, v=0, 1, 2, \dots, N-1$ 。

离散余弦变换（DCT）及其应用

通常根据可分离性，二维DCT可用两次一维DCT来完成，其算法流程与DFT类似，即

$$f(x, y) \rightarrow F_{\text{行}}[f(x, y)] = F(x, v)$$

转置

$$\rightarrow F(x, v)^T \rightarrow F_{\text{列}}[F(x, v)^T] = F(u, v)^T \quad (1-12)$$

转置

$$\rightarrow F(u, v)$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

• 1.3 快速离散余弦变换

离散余弦变换的计算量相当大，在实用中非常不方便，也需要研究相应的快速算法。目前已有多种快速DCT（FCT），在此介绍一种由FFT的思路发展起来的FCT。

首先，将 $f(x)$ 延拓为

$$f_e(x) = \begin{cases} f(x) & x=0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & x=N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (1-13)$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

按照一维DCT的定义， $f_e(x)$ 的DCT为

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f_e(x) \quad (1-14)$$

$$\begin{aligned} F(u) &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=N}^{2N-1} 0 \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f_e(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=N}^{2N-1} f_e(x) \cdot \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x) e^{-j \frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ e^{-j \frac{u\pi}{2N}} \cdot \sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x) e^{-j \frac{2xu\pi}{2N}} \right\} \end{aligned}$$

式中， $\operatorname{Re}\{\cdot\}$ 表示取复数的实部。

离散余弦变换（DCT）及其应用

由于 $\sum_{x=0}^{2N-1} f_e(x) e^{-j\frac{2xu\pi}{2N}}$ 为 $f_e(x)$ 的 $2N$ 点 DFT。因此，在作 DCT 时，可把长度为 N 的 $f(x)$ 的长度延拓为 $2N$ 点的序列 $f_e(x)$ ，然后对 $f_e(x)$ 作 DFT，最后取 DFT 的实部便可得到 DCT 的结果。

同理对于离散余弦逆变换 IDCT，可首先将 $F(u)$ 延拓为

$$F_e(u) = \begin{cases} F(u) & u=0, 1, 2, \dots, N-1 \\ 0 & u=N, N+1, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (1-15)$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

由式(1-9)可得，DCT的IDCT为

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{1}{N}} F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{u=1}^{2N-1} F_e(u) \cos \frac{(2x+1)u\pi}{2N} \\ &= \sqrt{\frac{1}{N}} F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{u=1}^{2N-1} F_e(u) e^{j \frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\} \quad (1-16) \\ &= \left(\sqrt{\frac{1}{N}} - \sqrt{\frac{2}{N}} \right) F_e(0) + \sqrt{\frac{2}{N}} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{u=0}^{2N-1} [F_e(u) e^{j \frac{u\pi}{2N}}] e^{j \frac{(2x+1)u\pi}{2N}} \right\} \end{aligned}$$

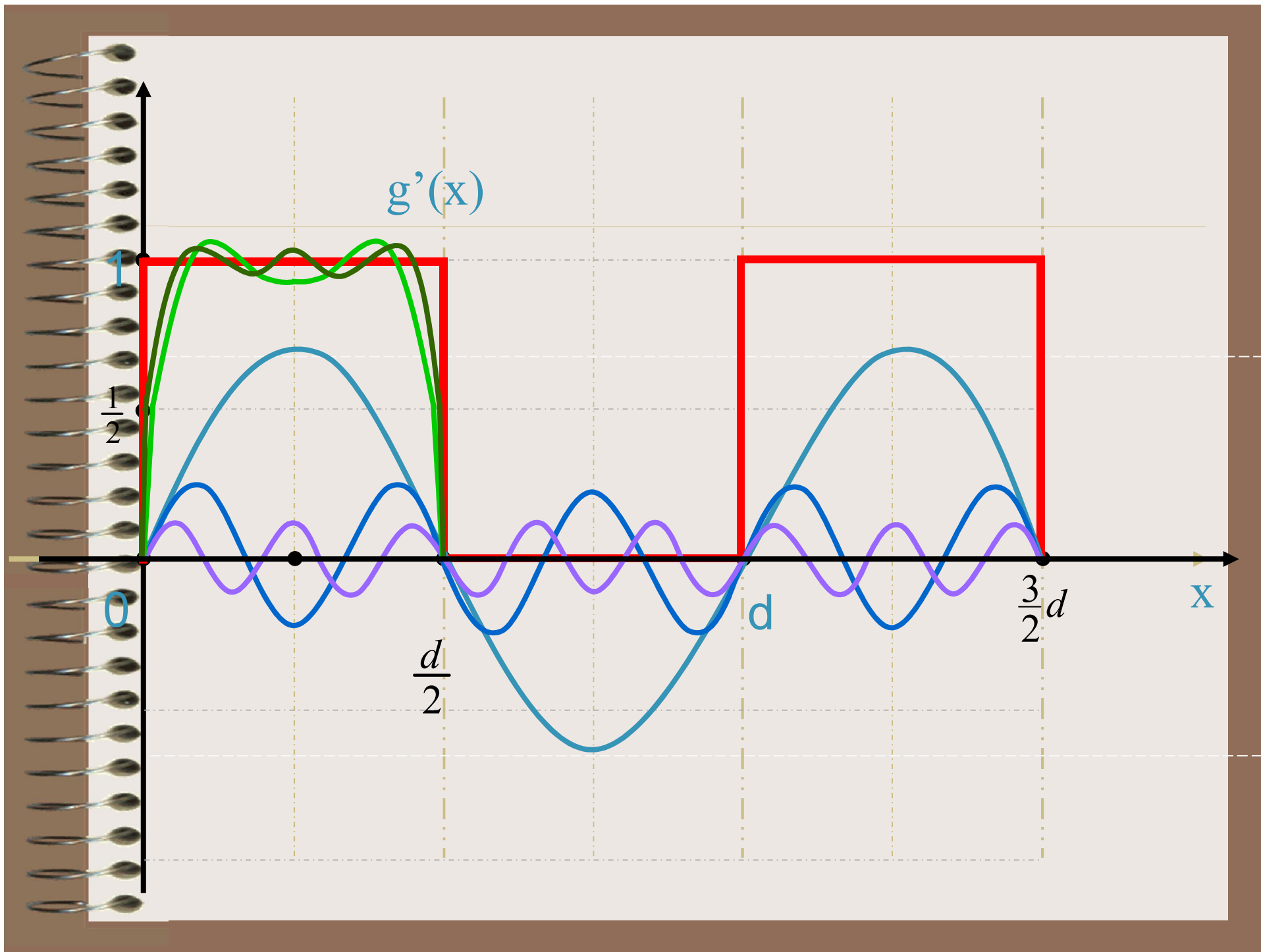
由式（7-63）可见，IDCT可由 $F_e(u) e^{j \frac{u\pi}{2N}}$ 的 $2N$ 点的IDFT来实现。

离散余弦变换（DCT）及其应用

最后要注意的是二维DCT的频谱分布，其谱域分布与DFT相差一倍，如图1-1所示。

从图中可以看出，对于DCT而言， $(0, 0)$ 点对应于频谱的低频成分， $(N-1, N-1)$ 点对应于高频成分，而同阶的DFT中， $(N/2, N/2)$ 点对应于高频成分（注：此频谱图中未作频谱中心平移）。

由于DFT和IDFT已有快速算法FFT和IFFT，因此可用它们实现快速DCT和IDCT算法FCT及IFCT。不过，由于FFT及IFFT中要涉及到复数运算，因此这种FCT及IFCT算法并不是最佳的。



离散余弦变换（DCT）及其应用

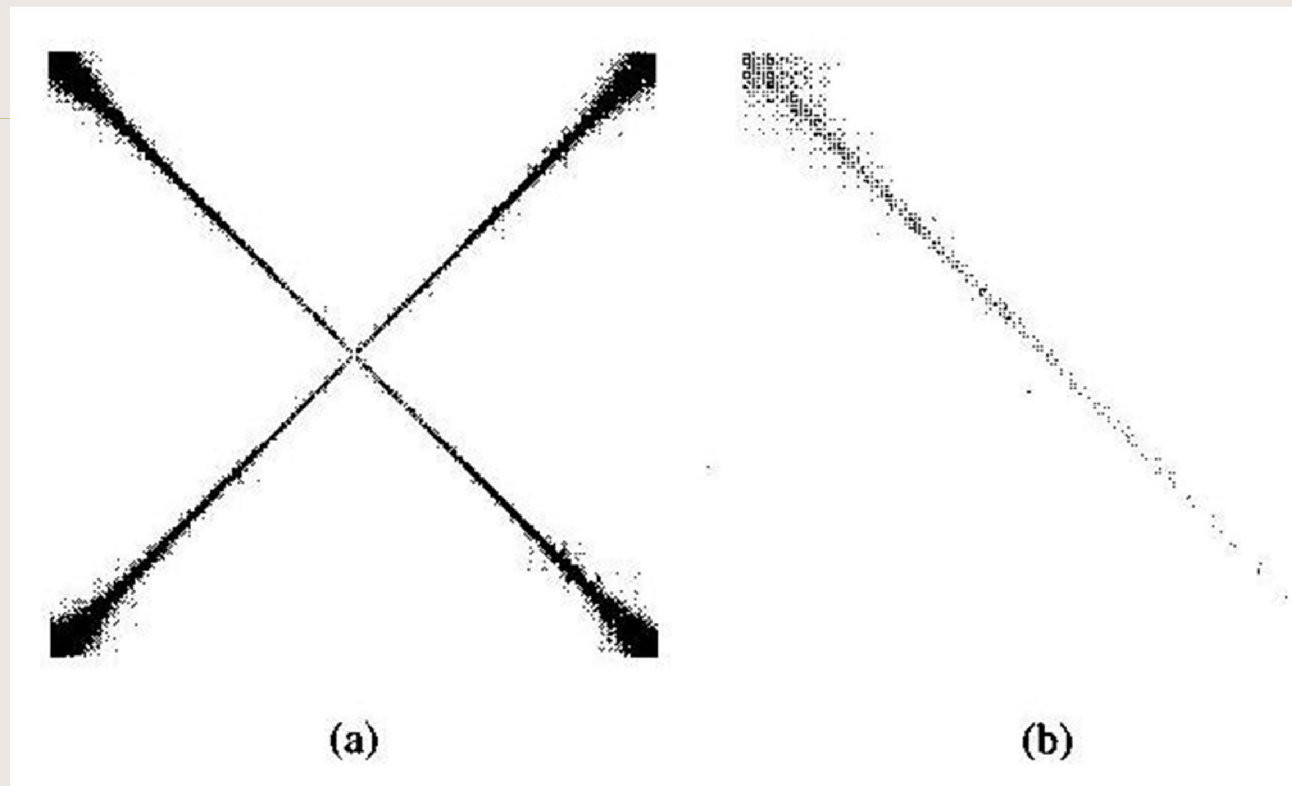


图1-1 DFT和DCT的频谱分布
(a) DFT频谱分布； (b) DCT频谱分布

离散余弦变换（DCT）及其应用

- 1.4 离散余弦变换在图像压缩中的应用
- 1.4.1 图像压缩概述

多媒体数据的显著特点：数据量非常大。例如，一张彩色相片的数据量可达10MB；视频影像和声音由于连续播放，数据量更加庞大。这对计算机的存储以及网络传输都造成了极大的负担。解决办法之一就是进行数据压缩，压缩后再进行存储和传输，到需要时再解压、还原。

在位图格式的图像存储方式中，像素与像素之间在行方向和列方向都具有很大的相关性，我们说整体数据的冗余度很大，需要对图像数据进行很大程度的压缩

离散余弦变换（DCT）及其应用

多媒体数据的冗余类型

多媒体数据表示中存在着大量的冗余，数据压缩技术就是利用多媒体数据的冗余性来减少数据量的方法。常见图像、视频、音频数据中存在的冗余类型如下：

1. 空间冗余
2. 时间冗余
3. 视觉冗余

离散余弦变换（DCT）及其应用

1. 空间冗余

一幅图像表面上各采样点的颜色之间往往存在着**空间连贯性**，基于离散像素采样来表示物体表面颜色的像素存储方式可利用空间连贯性，达到减少数据量的目的。

例如，在静态图像中有一块表面颜色均匀的区域，在此区域中所有点的光强和色彩以及饱和度都是相同的，因此数据有很大的空间冗余。

帧内压缩

图——Bitmap——

颜色相同的块——

帧内压缩



离散余弦变换（DCT）及其应用

2. 时间冗余

运动图像一般为位于一时间轴区间的一组连续画面，其中的相邻帧往往包含相同的背景和移动物体，只不过移动物体所在的空间位置略有不同，所以后一帧的数据与前一帧的数据有许多共同的地方，这种共同性是由于相邻帧记录了相邻时刻的同一场景画面，所以称为**时间冗余**。

同理，语音数据中也存在着时间冗余。



3. 视觉冗余

人类的视觉系统由于受生理特性的限制，对于图像场的注意是非均匀的，人对细微的颜色差异感觉不明显。

例如，人类视觉的一般分辨能力为 2^6 灰度等级，而一般的图像的量化采用的是 2^8 灰度等级，即存在视觉冗余。

人类的听觉对某些信号反映不太敏感，使得压缩后再还原有允许范围的变化，人也感觉不出来。

离散余弦变换（DCT）及其应用

数据压缩方法的分类

1. 按照压缩方法是否产生失真分类

(1) **无失真压缩** 无失真压缩要求解压以后的数据和原始数据完全一致。解压后得到的数据是原数据的复制，是一种可逆压缩。

- 无失真压缩法去掉或减少数据中的冗余，恢复时再重新插到数据中，因此是可逆过程
- 根据目前的技术水平，无损压缩算法一般可以把普通文件的数据压缩到原来的 $1/2 - 1/4$ 。一些常用的无损压缩算法有赫夫曼 (Huffman) 算法和 LZW (Lempel-Ziv & Welch) 压缩算法

离散余弦变换（DCT）及其应用

数据压缩方法的分类

(2) **有失真压缩** 解压以后的数据和原始数据不完全一致，是不可逆压缩方式。有失真压缩还原后，不影响信息的表达

例如，图像、视频、音频数据的压缩就可以采用有损压缩方法，因为其中包含的数据往往多于我们的视觉系统和听觉系统所能接收的信息，丢掉一些数据而不至于对声音或者图像所表达的意思产生误解，但可大大提高压缩比。图像、视频、音频数据的压缩比可高达100:1，但人的主观感受仍不会对原始信息产生误解。

离散余弦变换（DCT）及其应用

数据压缩方法的分类

2. 按照压缩方法的原理分类

- **预测编码**：基本思想是利用已被编码的点的数值，预测邻近的一个像素点的数值
- **变换编码**：基本思想是将图像的光强矩阵变换到系数空间上，然后对系数进行编码压缩
- **统计编码**：根据信息出现概率的分布特性而进行的压缩编码 ***无失真编码***
- **分析-合成编码**：基元和特征参数
- **混合编码**：混合压缩是利用了各种单一压缩的长处，以求在压缩比、压缩效率及保真度之间取得最佳折衷

离散余弦变换（DCT）及其应用

影响数据压缩的要素

- 压缩比
 - 压缩前后文件大小之比，越高越好，但受速度、消耗资源等的影响
- 图像质量
 - 还原后与原图像相比，评估的方法有客观评估和主观评估
- 压缩与解压缩速度
 - 与压缩方法和压缩编码的算法有关，一般压缩比解压缩计算量大，因而压缩比解压缩慢

离散余弦变换 (DCT) 及其应用

图像压缩编码举例

(1)、行程编码 (RLE)

现实中有许多这样的图像，在一幅图像中具有许多颜色相同的图块。在这些图块中，许多行上都具有相同的颜色，或者在一行上有许多连续的像素都具有相同的颜色值。在这种情况下就不需要存储每一个像素的颜色值，而仅仅存储一个像素的颜色值，以及具有相同颜色的像素数目就可以，或者存储像素的颜色值，以及具有相同颜色值的行数。

这种压缩编码称为行程编码 (run length encoding, RLE)，具有相同颜色并且是连续的像素数目称为行程长度。

- 例如，字符串 AAABCDDDDDDDDDBBBBBB
利用RLE原理可以压缩为 3ABC8D5B

离散余弦变换（DCT）及其应用

图像压缩编码举例

RLE编码简单直观，编码/解码速度快，因此许多图形和视频文件，如.BMP

.TIFF及AVI等格式文件的压缩均采用此方法。

由于一幅图像中有许多颜色相同的图块，用一整数对存储一个像素的颜色值及相同颜色像素的数目（长度）。例如：

(G , L)
颜色 长度
值

编码时采用从左到右，从上到下的排列，每当遇到一串相同数据时就用该数据及重复次数代替原来的数据串。

离散余弦变换 (DCT) 及其应用

图像压缩编码举例

000000003333333333
2222222222226666666
111111111111111111
111111555555555555
888888888888888888
5555555555555553333
222222222222222222

(0,8) (3,10) (2,11) (6,7)
(1,18) (1,6) (5,12) (8,18)
(5,14) (3,4) (2,18)

18*7的像素颜色仅用11对数据

离散余弦变换（DCT）及其应用

图像压缩编码举例

游程长度编码特点：

- 直观，经济；
- 是一种无损压缩；
- 压缩比取决于图像本身特点，相同颜色图像块越大，图像块数目越少，压缩比越高。
- 适用于计算机生成的图像，例如。BMP、TIF等，不适于颜色丰富的自然图像。
- 这并不是说RLE编码方法不适用于自然图像的压缩，相反，在自然图像的压缩中少不了RLE，只不过是不能单纯使用RLE一种编码方法，需要和其他的压缩编码技术联合应用。

离散余弦变换（DCT）及其应用

图像压缩编码举例

(2)、哈夫曼编码 (Huffman) :

由于图像中表示颜色的数据出现的概率不同，对于出现频率高的赋（编）予较短字长的码，对出现频率小的编于较长字长的码，从而减少总的代码量，但不减少总的信息量。

离散余弦变换（DCT）及其应用

图像压缩编码举例

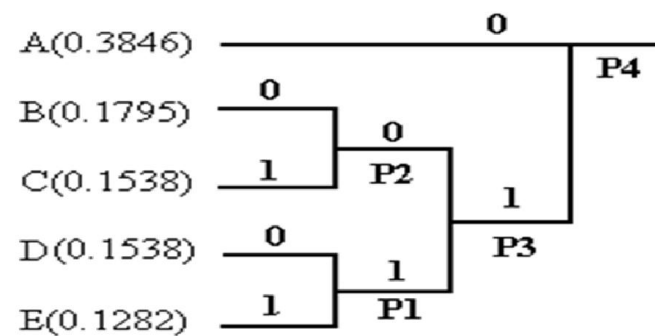
- (1) 初始化，根据符号概率的大小按由大到小顺序对符号进行排序
- (2) 把概率最小的两个符号组成一个节点，如图4-02中的D和E组成节点 P_1 。
- (3) 重复步骤2，得到节点 P_2 、 P_3 和 P_4 ，形成一棵“树”，其中的 P_4 称为根节点。
- (4) 从根节点 P_4 开始到相应于每个符号的“树叶”，从上到下标上“0”（上枝）或者“1”（下枝），至于哪个为“1”哪个为“0”则无关紧要，最后的结果仅仅是分配的代码不同，而代码的平均长度是相同的。
- (5) 从根节点 P_4 开始顺着树枝到每个叶子分别写出每个符号的代码。

离散余弦变换（DCT）及其应用

图像压缩编码举例

赫夫曼编码举例

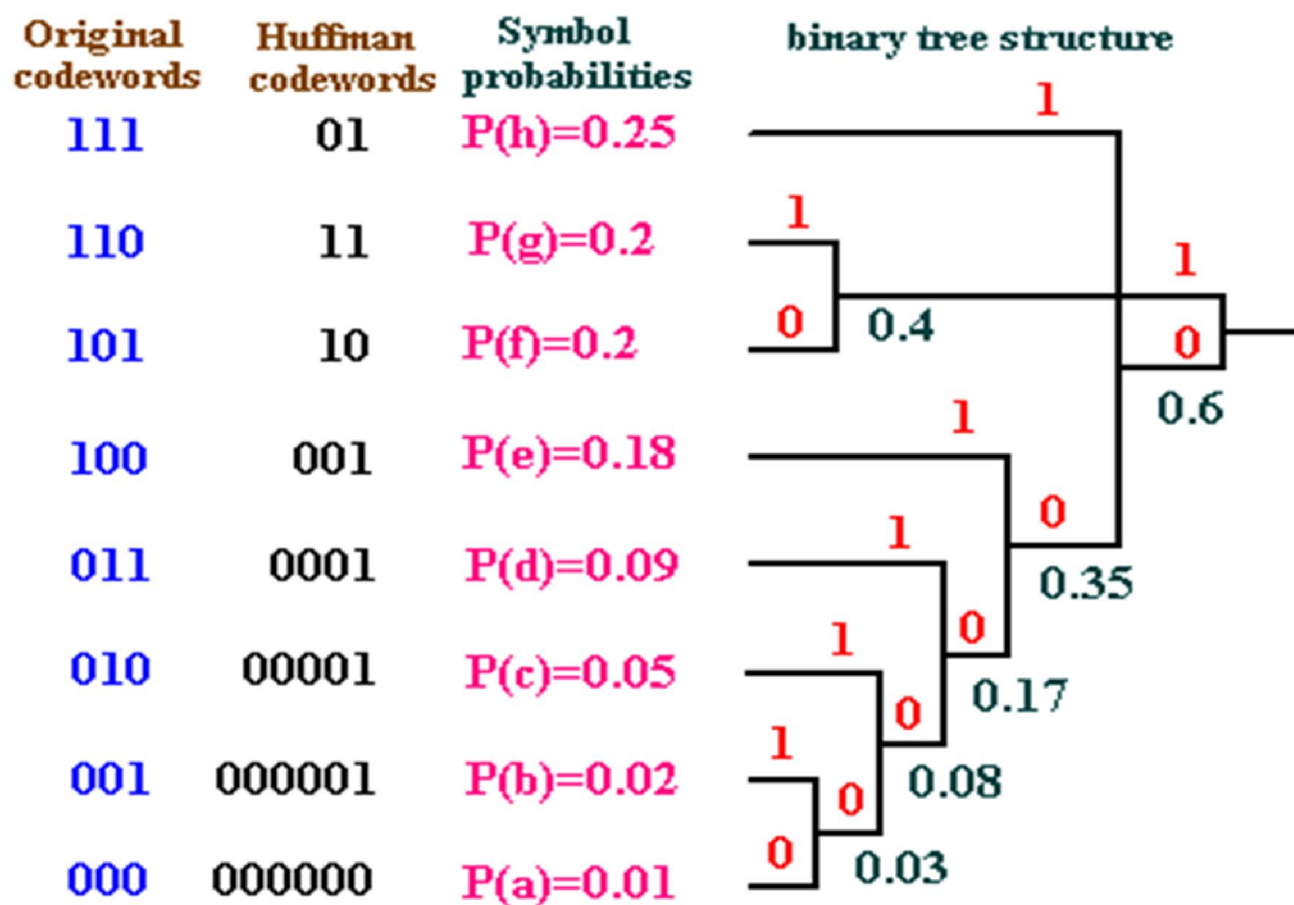
符号	出现的次数	$\log_2(1/p_i)$	分配的代码	需要的位数
<i>A</i>	15 (0.3846)	1.38	0	15
<i>B</i>	7 (0.1795)	2.48	100	21
<i>C</i>	6 (0.1538)	2.70	101	18
<i>D</i>	6 (0.1538)	2.70	110	18
<i>E</i>	5 (0.1282)	2.96	111	15



离散余弦变换（DCT）及其应用

图像压缩编码举例

赫夫曼编码举例



离散余弦变换（DCT）及其应用

1.4 基于DCT图像压缩

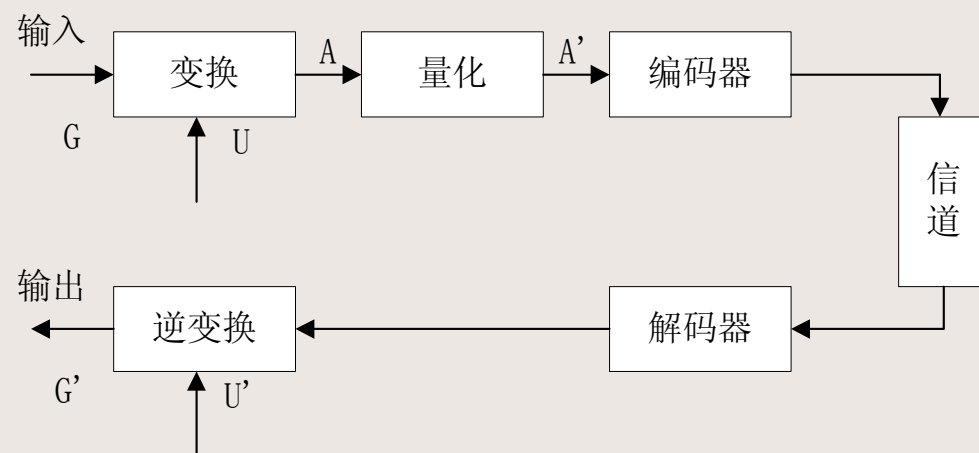
• 1) 基本概念

- 将在空域上描述的图象，经过某种变换（通常采用，余弦变换、傅立叶变换、沃尔什变换等），在某种变换域里进行描述。
- 在变换域里，首先降低了图象的相关性；其次通过某种图象处理（如频域的二维滤波）以及熵编码，则可进一步压缩图象的编码比特率。

离散余弦变换（DCT）及其应用

基于DCT图像压缩

• 2) 变换压缩原理框图



G : 输入数字图象 G' : 逆变换后的复原图象

U : 二维正交变换 U' : 二维正交逆变换

A : 变换域中的变换系数 A' : 量化后的变换系数

离散余弦变换（DCT）及其应用

基于DCT图像压缩

• 3) 常用图象变换技术讨论

- 傅立叶变换和余弦变换
- 傅立叶变换及频谱移中后，其能量集中在中心附近。中心数据又称为直流分量，代表全图数值的算术平均值。
- 其编码误差来源有：变换系数经过量化器而引起的量化误差。常使高频分量为0，导致图象模糊。

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

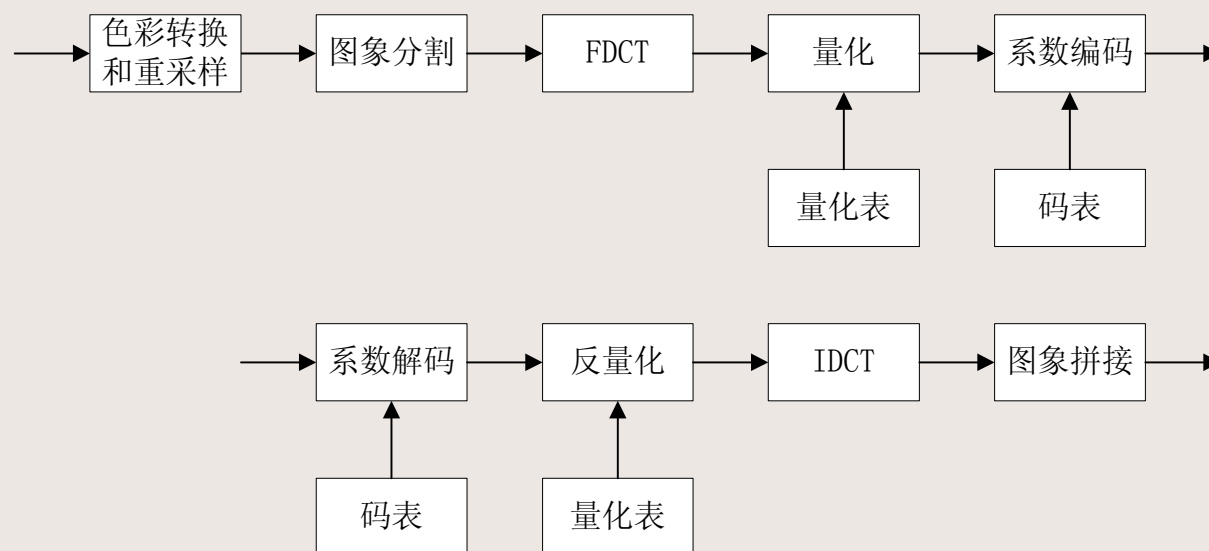
- 1) JPEG基本系统
- 2) FDCT和IDCT
- 3) 量化与反量化
- 4) 对量化系数的处理和组织
- 5) 熵编码
- 6) 应用举例

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

• 1) JPEG基本系统

- 以8*8的图象块为基本单位进行编码；
- 将RGB转换为亮度-色调-饱和度系统，并重新采样；



离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

– YIQ（NTSC制）与YUV（PAL制）

- Y：指颜色的明视度、亮度、灰度值；I或U：指色调；Q或V：指饱和度。
- $Y=0.299R+0.587G+0.114B$
- $I=0.596R-0.247G-0.322B$
- $Q=0.211R-0.523G+0.312B$
- $U=0.148R-0.289G+0.473B$
- $V=0.615R-0.515G-0.1B$

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

- 思想：人对亮度比对色彩敏感，在光线不足的情况下，所观察物体都是黑白的。因此可以对色调和饱和度做粗略处理。
- 方法：对 8×8 图象块矩阵，Y成分数据不变，U每 2×2 个数据求平均，V每 2×1 个数据求平均。称为YUV421系统。
- 除此,还有YUV422, 411, 420等系统.

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

• 2) FDCT与IDCT

- 思想：人眼对低频数据比对高频数据敏感。
- 根据8*8的二维DCT定义

$$F(u, v) = \frac{1}{4} C(u) C(v) \sum_{x=0}^7 \sum_{y=0}^7 f(x, y) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{16} \right] \cos \left[\frac{\pi(2y+1)v}{16} \right]$$

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{u=0}^7 \sum_{v=0}^7 F(u, v) C(u) C(v) \cos \left[\frac{\pi(2u+1)x}{16} \right] \cos \left[\frac{\pi(2v+1)y}{16} \right]$$

其中

$$C(w) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{当 } w = 0 \\ 1 & \text{其他} \end{cases}$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

- 称 $F(0,0)$ 为直流系数，其他为交流系数。
- JPEG标准不规定FDCT和IDCT的算法。

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

- 3) 量化与反量化

- 思想：将每个DCT系数除以各自量化步长并四舍五入后取整，得到量化系数。

$$\bar{F}(u, v) = INT \left[\frac{F(u, v)}{S(u, v)} \pm 0.5 \right]$$

$$F(u, v) = \bar{F}(u, v) S(u, v)$$

- JPEG系统分别规定了亮度分量和色度分量的量化表，显然色度分量相应的量化步长比亮度分量大。

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

• 4) 对量化系数的处理和组织

- 思想：JPEG采用定长和变长相结合的编码方法。
- 直流系数：通常相邻8*8图象块的DC分量很接近，因此JPEG对量化后的直流分量采用无失真DPCM编码。通常JPEG要保存所需比特数和实际差值。

$$\Delta F(0,0) = F_i(0,0) - F_{i-1}(0,0)$$

- 交流系数：经过量化后，AC分量出现较多的0。JPEG采用对0系数的行程长度编码。而对非0值，则要保存所需数和实际值。

静止图像编码国际标准JPEG

-
- A diagram of a 2D hexagonal lattice. The lattice consists of 8 columns and 8 rows of nodes, represented by black circles. Horizontal connections are shown between adjacent nodes in each row. Diagonal connections are shown between nodes in adjacent rows, forming a triangular pattern. An arrow at the top points to the right, labeled '0'. An arrow at the bottom points to the right, labeled '63'.

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

• 5) 熵编码

- 对于直流系数的差值，采用Huffman编码。JPEG标准为亮度和色度分量分别拟定了Huffman码表。
- 对于交流0系数的行长，采用Huffamn编码。同样JPEG标准为亮度和色度分量分别拟定了Huffman码表。
- 计算每像素的平均比特称为码率。
 - 0.25——0.50 图象质量中等，满足某些应用
 - 0.50——0.75 质量好，满足多数应用
 - 0.75——1.50 极好，满足大多数应用
 - 1.50——2.0 与原始图象质量一样

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

- 6) 应用举例
 - Lenna图象的一个8*8方块

$$f(x,y) = \begin{bmatrix} 139 & 144 & 149 & 153 & 155 & 155 & 155 & 155 \\ 144 & 151 & 153 & 156 & 159 & 156 & 156 & 156 \\ 150 & 155 & 160 & 163 & 158 & 156 & 156 & 156 \\ 159 & 161 & 162 & 160 & 160 & 159 & 159 & 159 \\ 159 & 160 & 161 & 162 & 162 & 155 & 155 & 155 \\ 161 & 161 & 161 & 161 & 160 & 157 & 157 & 157 \\ 162 & 162 & 161 & 163 & 162 & 157 & 157 & 157 \\ 162 & 162 & 161 & 161 & 163 & 158 & 158 & 158 \end{bmatrix}$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

– 经过FDCT后的变换系数矩阵

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} 1260 & -1 & -12 & -5 & 2 & -2 & -3 & 1 \\ -23 & -17 & -6 & -3 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ -11 & -9 & -2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -7 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & -4 & -2 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

离散余弦变换 (DCT) 及其应用

静止图像编码国际标准 JPEG

- 假设上一编码块的直流量化系数为77，则直流差值为2。
- 则该图象块编码为

79	0-2	-1	-1	-1	00-1	0...
2,2	1/2,-2	0/1,-1	0/1,-1	0/1,-1	2/1,-1	EOB
011,10	11011,01	00,0	00,0	00,0	11100,0	1010

静止图像编码国际标准JPEG

[illegible]

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

– 反变换

$$\hat{f}(x,y) = \begin{bmatrix} 144 & 146 & 149 & 152 & 154 & 156 & 156 & 156 \\ 148 & 150 & 152 & 154 & 156 & 156 & 156 & 156 \\ 155 & 156 & 157 & 158 & 158 & 157 & 156 & 155 \\ 160 & 161 & 161 & 162 & 161 & 159 & 157 & 155 \\ 163 & 163 & 164 & 163 & 162 & 160 & 158 & 156 \\ 163 & 163 & 164 & 164 & 162 & 160 & 158 & 157 \\ 160 & 161 & 162 & 162 & 162 & 161 & 159 & 158 \\ 158 & 159 & 161 & 161 & 162 & 161 & 159 & 158 \end{bmatrix}$$

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

- 编码比特率与质量因子
- 通常在图象传输时要求固定比特率，**JPEG**通过设定一个质量控制因子 Q ，在量化时用该因子与量化表中的量化步长相乘作为实际的量化步长。
- 则要求较高比特率时， Q 取较小值如**0.1**；否则取大值。 Q 与比特流一起传送给解码端。

离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

压缩率
9:2



离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

压缩率
18.4



离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

压缩率
51.6



离散余弦变换（DCT）及其应用

静止图像编码国际标准JPEG

- **H.261**: 用于电视电话和电视会议；码率128kbps——384kbps；
- **MPEG1**: 用于数字存储媒体（如VCD），码率为1——1.5Mbps，适合通讯网络；
- **MPEG2**: 用于数字电视和高清晰度电视（如CCTV Ch 5），码率为1.5——30Mbps；
- **MPEG4**: 用于64Kbps以下带宽的音视编码，实现基于内容的编码；
- 其他编码方法：子带编码、小波编码JPEG2000、分形编码和基于模型的编码等。

离散余弦变换（DCT）及其应用

•1.4 离散余弦变换在数字水印中的应用

数字水印技术

- 近几年来，数字作品盗版现象日益严重，有关数字作品的版权保护问题已经引起了各方面的关注；
- 数字水印技术作为新型的版权保护技术，已经得到广泛的认可，有越来越多的技术人员投入到这方面的研究中，并取得了很好的成绩。

离散余弦变换（DCT）及其应用

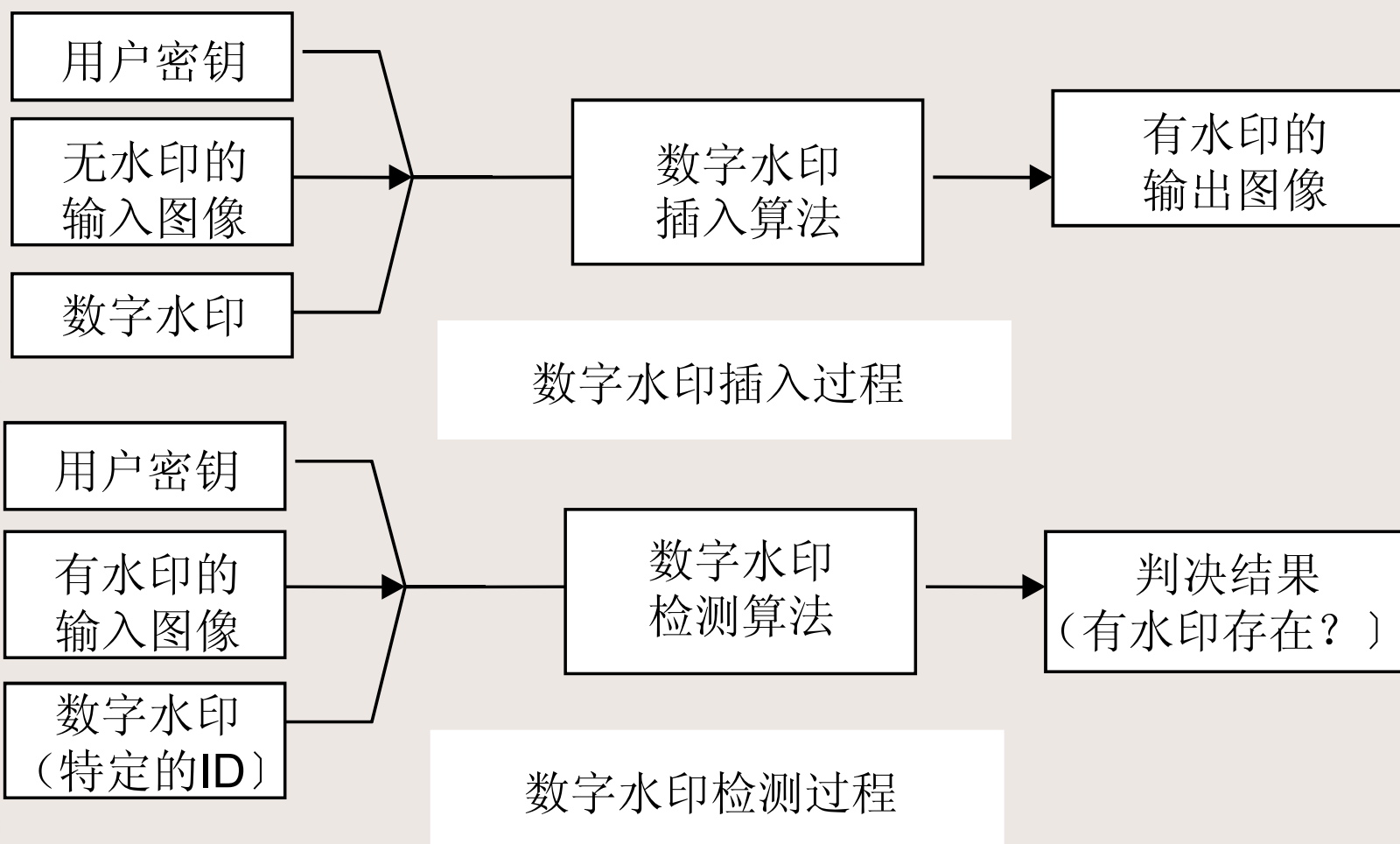
数字水印分类

数字水印有多种分类方法

- 按照可视性：可见水印和隐形水印；
- 按照鲁棒性：脆弱性水印和健壮性水印；
- 按照嵌入方法：空间域和变换域水印；
- 按照检测与提取方法分类：私有水印、半公开水印和公开水印；

离散余弦变换（DCT）及其应用

数字水印原理



离散余弦变换（DCT）及其应用

数字水印分存

- 数字水印分存主要是将秘密共享的思想引入到数字水印中；
- 借助秘密共享的算法——中国剩余定理，利用 (k, n) 方案实现水印分存；
- 水印分存可以实现基于部分内容的水印提取，对内容侵权有比较好的鉴定能力，可以有效的保护数字作品的版权。

离散余弦变换（DCT）及其应用

数字水印分存原理

- 可以将任何水印文件（如数字序列、文本、图标等）都看作二进制流文件；
- 水印分存步骤：
 - （1）对水印图像进行置乱；
 - （2）按8比特切割，转化为十进制数据；
 - （3）对切割后的水印数据进行分存；

注：分存后的水印数据需要用9比特表示。

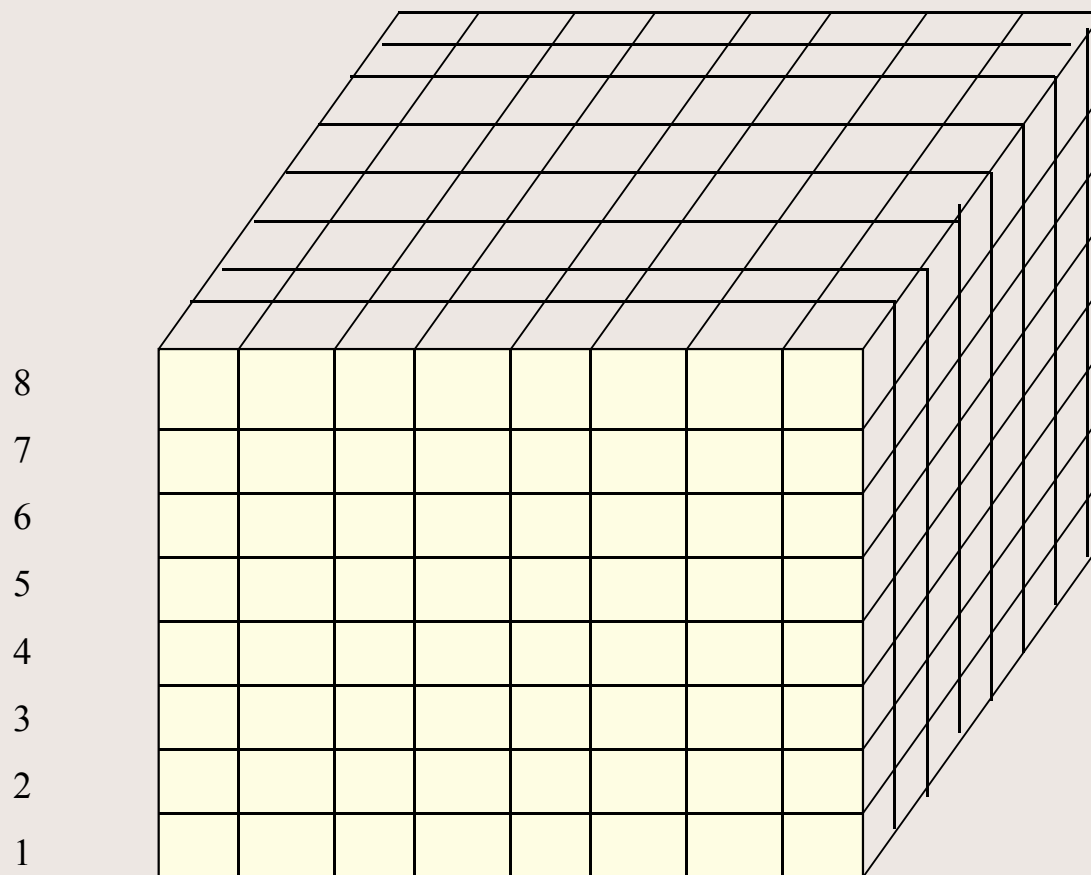
离散余弦变换（DCT）及其应用

空间域水印嵌入算法

- 嵌入算法与LSB算法类似，将水印信息嵌入到图像像素的最低两比特。
 - 嵌入算法：
 - （1）将原始图像进行分块，分为 n 块；
 - （2）将水印信息按块转化为二进制比特流，分别嵌入到各块图像像素的最低两比特中；
- 注：要保管好 m ，与块相一一对应。

离散余弦变换（DCT）及其应用

空域水印实例:图象的位平面表示



离散余弦变换（DCT）及其应用

LSB隐藏原理图解

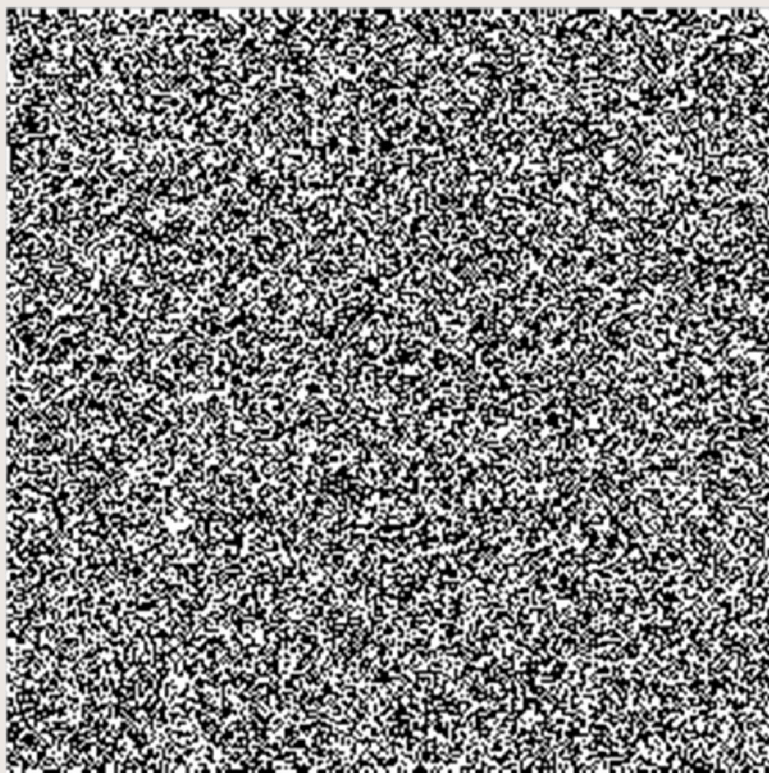
Lena原图： 8-bit灰度BMP图象



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

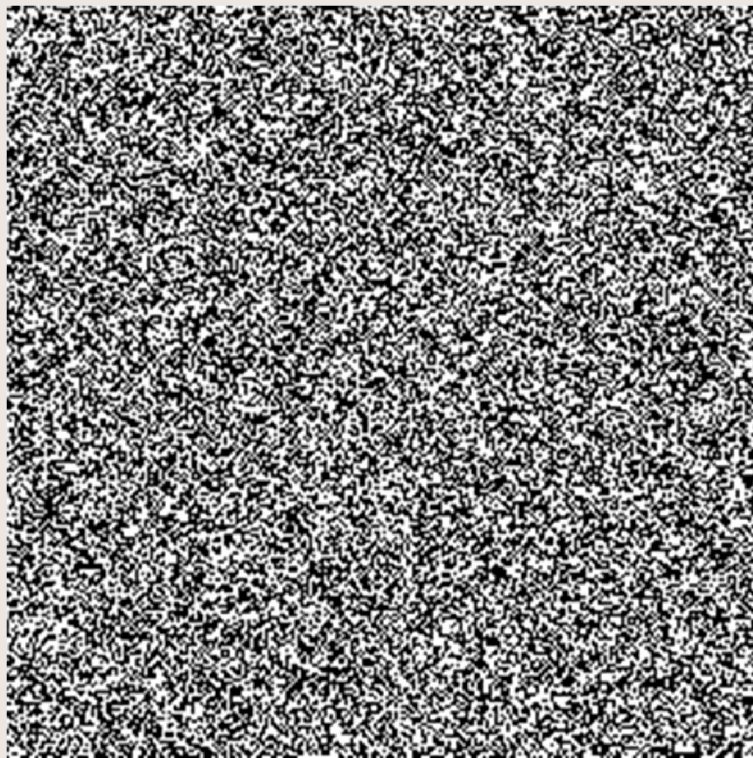
第一个位平面与去掉第1个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

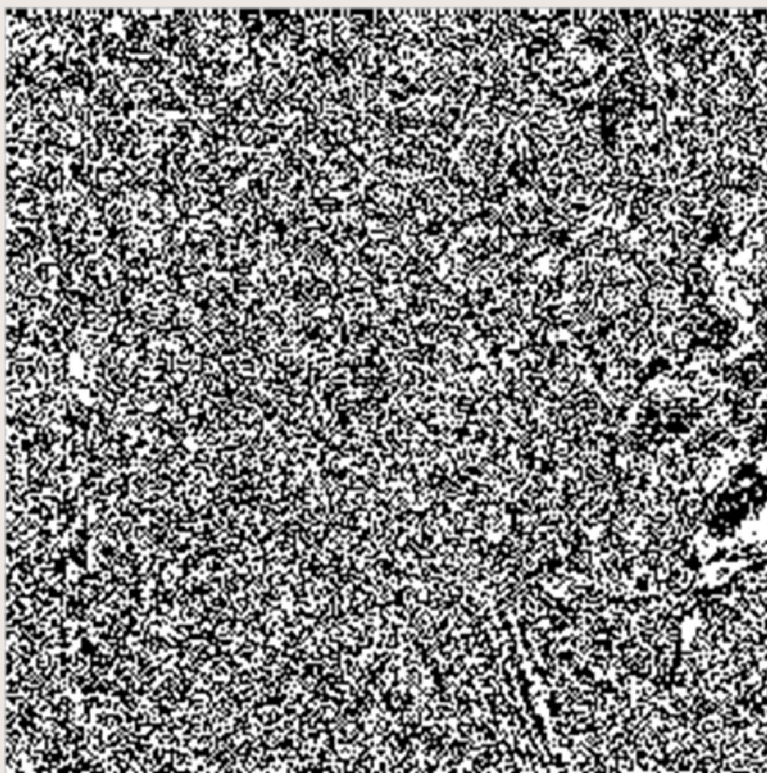
第二个位平面与去掉第1-2个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

第三个位平面与去掉第1-3个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

第四个位平面与去掉第1-4个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

第五个位平面与去掉第1-5个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

第六个位平面与去掉第1-6个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

Lena位平面与能量分布

第七个位平面与去掉第1-7个位平面的Lena:



离散余弦变换（DCT）及其应用

实验结果



原始图像(512*512)

MIMI

空间域水印图像(145*29)

离散余弦变换（DCT）及其应用

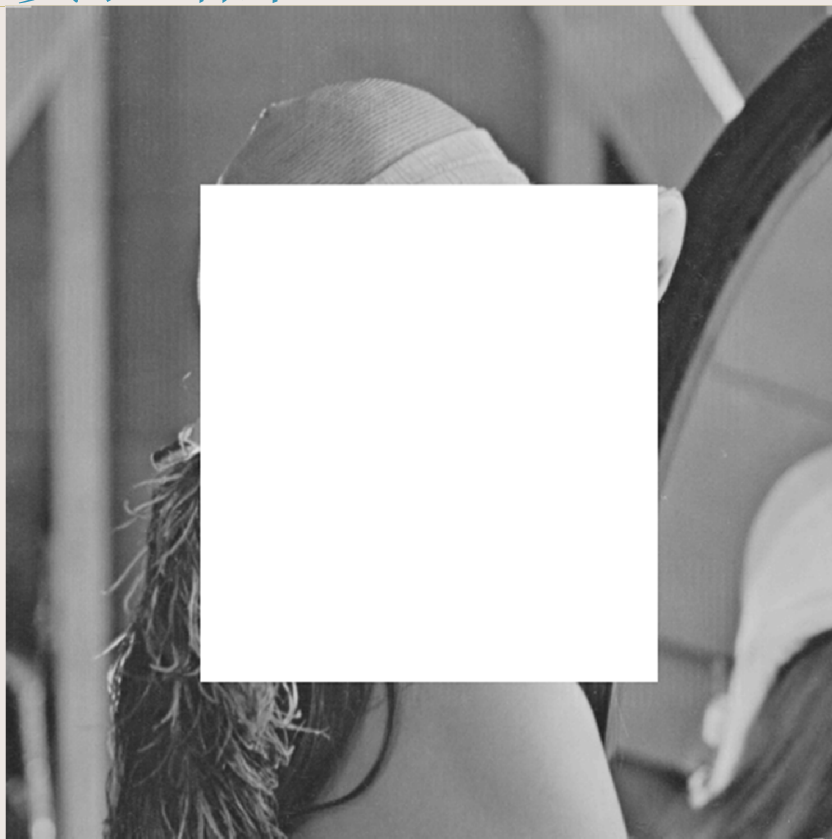
实验结果



基于
LSB
算法
嵌入
水印
结果

离散余弦变换（DCT）及其应用

实验结果



剪切

实验

结果

MIMI

离散余弦变换（DCT）及其应用

变换域水印嵌入算法

- 主要基于DCT变换，水印信息嵌入到DCT系数上；
- 嵌入步骤：
 - （1）将图像分为n块，每块再按 $8*8$ 分块，进行DCT变换；
 - （2）按下图所示嵌入水印数据；

离散余弦变换（DCT）及其应用
